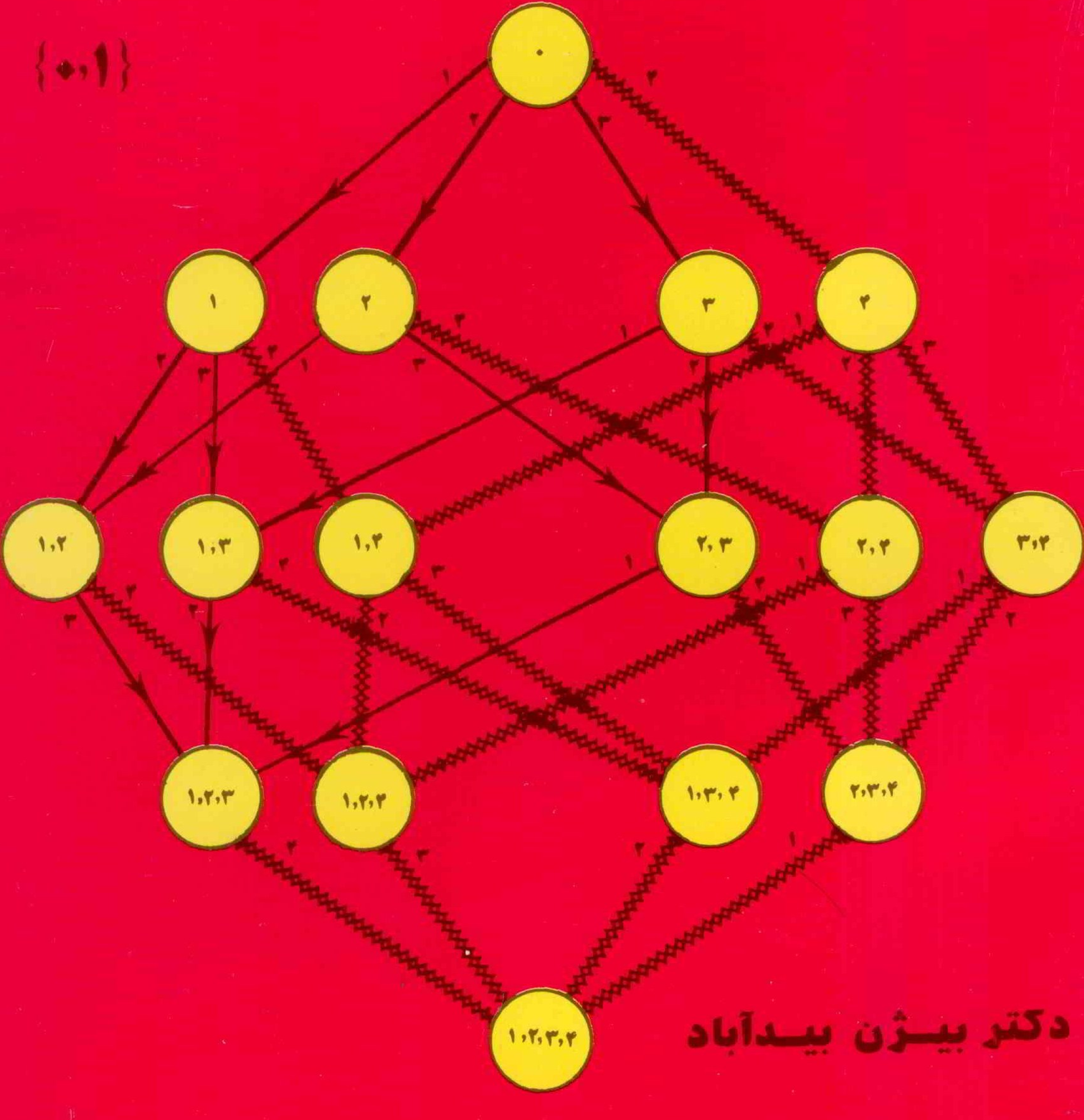
برنامه‌ریزی صفر-یک

پروسهٔ تصمیم‌گیری اپتیمم با متغیرهای دودوئی

و روش حل آن با کامپیوتر

{۰،۱}



دکتر بیژن بیدآباد

وزارت برنامه و بودجه

برنامه‌ریزی صفر - یک

پروسهٔ تصمیم گیری ابتدائی با متغیرهای دودوئی

و روش حل آن با کامپیوتر

نوشته : بیـــژن بیـــدآباد

دفتر برنامه‌ریزی منطقه‌ای

زمستـــان ۱۳۶۳

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

نیاز انسان به حل مسائل اطرافش برای بهبود شرایط زندگی وی سابقهٔ طولانی دارد. پیچیدگی مسائل دنیای واقعی امری شناخته شده است و حل این مسائل پدیده‌ای است که هر روز فکر انسان را به خود متوجه ساخته تا بتواند برای بهبود شرایط زندگی خود موانع را به نحو احسن از میان برداشته و ما بین راه حل های مختلف راه حل بهترین را انتخاب نماید. یکی از روشهایی که با استفاده از ریاضیات توانسته این گونه مسائل را با قدرت تحلیل بیشتری ارزیابی نماید روش برنامه ریزی صفر- یک می باشد. این روش با طبیعت خاص متغیرهای خود انعطاف بیشتری در فرموله کردن مسائل واقعی دنیای خارجی دارد. در روش برنامه ریزی صفر- یک متغیرها فقط می توانند دو مقدار خاص را بخود بگیرند: صفر و یک. این متغیرها که به متغیرهای دودوئی (Binary) موسوم می باشند فقط در حوزه تعریف خود دو حالت ضد و نقیض را بیان می نمایند، بله یا نه، روشن یا خاموش، اثبات یا نفی، سیاه یا سفید و از این قبیل.

با توجه به قابلیت انعطاف پذیری این روش این مقاله سعی دارد که شمائی کلی از این روش را در اختیار خواننده قرار دهد. این مقاله در دو بخش سازمان یافته است، بخش اول به بیان روش برنامه ریزی صفر- یک و طرق حل آن پرداخته است و بخش دوم بعلت وجود کاربردهای بسیار این روش سعی بر این دارد که مثالهائی برای فرموله کردن مسائل دنیای واقعی فراهم سازد.

باتوجه بەفرصت کمی کەداشتیم این مقاله نقائص بسیاری راداراست که انشاءاللەهمکاران عزیزنقائص ونظرات خودرا بەنویسنده گوشزدخواهندنموددر آخراززحمات آقای فیروزفراشی اوغانی وخانم سکینەپوراصغری خمامی که تایپ مشکل این مقاله رابعهدەگرفتندوباپشتکارخوددرتدوین این مقاله این جانب رابسیاریاری نمودندنهایت تشکررابعمل می آورد.

بیژن بیدآباد

کارشناس دفتربرنامەریزی منطقەای

زمستان ۱۳۶۳

فهرست

صفحه

بخش دوم

صفحه

بخـــش اول

برنا مەریـــزی صفـــر- یـک

۱- مقدمه وکلیات برنامه‌ریزی صفر- یک

واضح است که باتوجه به‌طبیعت مسائل نمی توان ازلحاظ ریاضی تمام آنها را با یک دیدنگاه کرد. به عبارت‌دیگر بیان ریاضی دنیای واقعی پیچیده‌گی طبیعت مسائل را دربردارد. لذا هردسته‌ای ازروشها ومدلها دربیان واقعیتهائی بکاربرده می‌شوند. برنامه‌ریزی خطی طبیعت مسائل یافتن اپتیمم راحیطه خودمدنظردارد که دارای محدودیت‌ها وتابع آبژکتیو خطی باشند. برنامه‌ریزی صفر- یک دسته دیگری ازمسائل را بررسی می نماید بطورمثال مسائلی راکه شرایط خطی بودن برنامه‌ریزی خطی راداراباشند. ومتغیرهای آن فقط بتوانند مقادیر صفرویا یک رااختیارنمایند. به هرجهت اگرتمام متغیرها دریک مدل برنامه‌ریزی خطی راطوری تعریف کنیم که بتوانند فقط صفریا یک اختیارکنند مسئله ما ازبرنامه‌ریزی خطی به برنامه‌ریزی صفر- یک تبدیل شده است.

درروشهای برنامه‌ریزی خطی وغیرخطی هرمتغیرآزاداست که هرمقداری را در حیطه محدودیتهای خودبپذیرد. تابع آبژکتیوروشهای فوق وهمچنین توابع محدودیت آنها همگی پیوسته می باشندوبدین ترتیب بی نهایت مقادیرمختلف می توانند درحوزه‌عمل خودبه متغیرهای مدل منصوب نمایند.

روش برنامه‌ریزی صفر- یک این محدودیت راقائل شده است که هرمتغیردر مدل فقط بتواند یکی ازدومقدارممکن راانتخاب نماید به‌عبارت دیگرهرمتغیر یا باید صفرباشدیا یک. این گونه مسائل وقتی دارای ابعادبسیارکوچک باشند رامیتوان با بررسی مدل حل نمود. مثال زیرا رادرنظربگیرید.

$$\min:\ f = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\text{STo: } x_1,\ x_2,\ x_3 = 0,1$$

برای حداقل کردن f ممکن است کوچکترین مقدار رابه‌هرکدام ازمتغیرها منصوب کنیم بدین ترتیب جواب ما $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ خواهدبود.

مثال زیررا نیزمی توان با بررسی آن حل کردولی احتیاج به بررسی بیشتری نسبت به مثال قبلی دارد.

$$\min:\ f = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad (۱-۲)$$

$$\text{s.To:}\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geqslant 1$$

این بار برای حداقل کردن f نمی توانیم روش فوق را بکاربریم چون محدودیت این مثال شرایط را تغییرداده است. ولی با توجه به محدودیت مزبور، واضح است که اگر $x_3 = x_2 = 0$ باشد مقدار x_1 باید یک شودبنابراین جواب ما به شکل زیرخواهدبود.

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 0 \qquad (۱-۳)$$
$$x_3 = 0$$

درمسائل بزرگتر که شامل محدودیتهای بیشتری می شودبه این سادگی نمی توانیم جواب را بدست آوریم. به هرحال این کار را با زبا بررسی محدودیتها می توان انجام داد. برای مثال مدل زیررا درنظربگیرید.

$$\min:\ f = -5x_1 + 7x_2 + 10x_3 - 3x_4 + x_5$$

$$\text{s.To.}\quad (1)\quad -x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 \geqslant 0$$

$$(2)\quad -2x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 \leqslant -4$$

$$(3)\quad -x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \geqslant 2$$

$$(4)\quad x_j = 0,1 \qquad j = 1, \ldots, 5$$

محدودیت (۲) را درنظربگیرید. اگرمتغیر x_3 رادرسمت چپ نامعادله وباقی جملات رادرسمت راست نامعادله قراردهیم، یک حدپائین برای متغیر x_3 به عنوان تابعی ازمتغیرهای دیگربدست می آوریم.

$$x_3 \geqslant \underbrace{1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5}_{\text{حدپائین برای } x_3} \qquad (۱-۵)$$

حال این سئوال مطرح است ، حدپائین متغیر x_3 چه اندازه می تواند باشد ؟ واضح است که حدپائین برای x_3 دارای کوچکترین مقدار خود است اگر متغیرهائی که با ضرائب منفی در نامعادله فوق پیدا شده اند مقادیر یک داشته باشند و باقی متغیرها مقادیر صفر را اتخاذ نمایند . این امر موجب این میشود که حدپائین برای متغیر x_3 مساوی $\frac{1}{2}$ شود . پس مقدار جواب برای x_3 باید یک شود .

$$x_3 \geqslant \frac{1}{2} \rightarrow x_3 = 1$$

باید توجه نمود که تمام محدودیتها اطلاعاتی شبیه به محدودیت (۱) به ما نمی دهند ، برای مثال محدودیت (۲) را درنظر بگیرید . اگر جملات آنرا طوری جابجا کنیم که حدپائین را برای متغیر x_2 به عنوان تابعی از سایر متغیرها به ما بدهد شکل زیر را بدست خواهیم آورد :

$$x_2 \geqslant \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \qquad (۱-۶)$$

اگر متغیرهای سمت راست دارای ضرائب منفی را مساوی صفر و باقی آنها را مساوی یک قرار دهیم نامساوی زیر بدست می آید :

$$x_2 \geqslant - \frac{1}{3} \qquad (۱-۷)$$

نامساوی فوق درمورد مقدار x_2 هیچگونه اطلاعی به ما نمی دهد . همینطور اگر حد بالا را برای متغیر x_2 از محدودیت (۳) بدست آوریم باز هیچگونه اطلاعات مفیدی راجع به x_2 بدست نخواهیم آورد .

$$x_2 \leqslant \underbrace{-2 + 2x_3 + x_4}_{\text{حد بالا برای } x_2} - x_5 \qquad (۱-۸)$$

اگر متغیرهای با ضرائب مثبت را مساوی ۱ و باقی را مساوی صفر قرار دهیم مقدار حد بالا برای متغیر x_2 بدست خواهد آمد . نتیجه به شکل زیر خواهد بود :

$$x_2 \leqslant 1 \qquad (۱-۹)$$

بدین ترتیب از این روش هم چیزی نمی توان بدست آورد . به هرحال با انتخاب محدودیت ها توانستیم از محدودیت سوم مقدار x_3 را پیدا کنیم . حال مقدار x_3 را که قبلا" پیدا کرده بودیم درداخل مسئله جایگزین می کنیم .

$$\text{min: } f = -5x_1 + 7x_2 + 10 - 3x_4 + x_5 \qquad (۱-۱۰)$$

یا $\quad -5x_1 + 7x_2 - 3x_4 + x_5$

$$\begin{aligned} \text{S.To:} \quad & (1) \quad -x_1 - 3x_2 - x_4 - 4x_5 \geqslant -5 \\ & (2) \quad -2x_1 - 6x_2 - 2x_4 - 2x_5 \leqslant -7 \\ & (3) \quad -x_2 + x_4 - x_5 \geqslant 0 \\ & (4) \quad x_j = 0,1 \quad j = 1,\dots,5 \end{aligned}$$

حال حد پائین برای x_2 را در این حالت از محدودیت (۲) بدست می آوریم :

$$x_2 \geqslant \frac{7}{6} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \qquad (۱-۱۱)$$

اگر متغیرهای با ضرائب منفی را مساوی یک و باقی را صفر قرار دهیم حد پائین x_2 برابر خواهد بود با :

$$x_2 \geqslant \frac{1}{6} \longrightarrow x_2 = 1 \qquad (۱-۱۲)$$

پس می توانیم نتیجه گیری کنیم که x_2 برابر یک می باشد . حالا مسئله ما بشکل زیر خواهد بود :

$$\text{min: } f = -5x_1 + 17 - 3x_4 + x_5 \qquad (۱-۱۳)$$

یا $\quad -5x_1 - 3x_4 + x_5$

$$\begin{aligned} \text{S.To:} \quad & (1) \quad -x_1 - x_4 - 4x_5 \geqslant -2 \\ & (2) \quad -2x_1 - 2x_4 - 2x_5 \leqslant -1 \\ & (3) \quad -x_4 - x_5 \geqslant 1 \\ & (4) \quad x_j = 0,1 \quad j = 1,\dots,5 \end{aligned}$$

شکل فوق که از جایگزینی مقدار $x_2 = 1$ و $x_3 = 1$ در شکل کلی مسئله به دست آمده است را بررسی می نمائیم . اگر به طریق توضیح داده شده در قبل عمل کنیم از محدودیت های (۳) و (۴) مقادیر $x_4 = 1$ و $x_5 = 0$ بدست خواهند آمد .

تنها متغیری که مقدار آن بدست نیامده است x_1 می باشد. برای حداقل کردن f باید مقدار x_1 مساوی یک باشد تا محدودیت ها برقرار باشند. وضوح این مطلب با بررسی محدودیتهای (۱) و (۲) و (۳) روشن می شود. پس جواب ما به صورت ذیل خواهد بود.

$$f = 9 \qquad (۱-۱۴)$$

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 1$$
$$x_5 = 0$$

علت حل شدن مسئله فوق بدلیل این بود که توانستیم در درجه اول مقدار x_3 را از محدودیت (۲) بدست آوریم، ولی در تمام حالات این امر اتفاق نمی افتد. حال مثال دیگری را درنظر بگیرید:

$$\text{min:} \quad f = 5x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 3x_4 + x_5 \qquad (۱-۱۵)$$

$$\text{S.To:} \quad (1) \quad x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 - 4x_5 \geqslant 2$$
$$(2) \quad 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 \leqslant 0$$
$$(3) \quad x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 \geqslant 1$$

درصورتی که درمدل فوق محدودیتها وجودنداشتند تمام متغیرها را مساوی صفر قرار می دادیم و تابع f حداقل شده بود ولی درعمل چنین حالتی بندرت پیدا می شود. درمسائلی که نظیر مسئله فوق با یدیک حدبالا برای علامت $\leqslant$ و یک حدپائین برای علامت $\geqslant$ برای هرمتغیر در تمام محدودیت ها پیدا کنیم. حدود بالاوپائین برای مثال فوق بشکل زیرخواهد بود:

محدودیت (۱)

$$(a) \quad x_1 \geqslant 2 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 + 4x_5 \;;\; \min LB = -4 \qquad (۱-۱۶)$$

$$(b) \quad x_2 \leqslant -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{4}{3}x_5 \;;\; \max \; UB = \frac{5}{3}$$

$$(c) \quad x_3 \geqslant \frac{2}{5} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{4}{5}x_5 \;;\; \min \; LB = 0$$

(d) $x_4 \geqslant 2 - x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 + 4x_5$; min LB= -5

(e) $x_5 \leqslant -\frac{2}{4} + \frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2 + \frac{5}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4$; max UB= $\frac{5}{4}$

واضح است که از محدودیت (۱) اطلاعاتی راجع به مقادیر متغیرها بدست نمی آید :

محدودیت (۲)

(۱–۱۷)

(a) $x_1 \leqslant 3x_2 - \frac{3}{2}x_3 - x_4 + x_5$; max UB = 4

(b) $x_2 \geqslant \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5$; min LB = $-\frac{1}{3}$

(c) $x_3 \leqslant -\frac{2}{3}x_1 + 2x_2 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5$; max UB = $2\frac{2}{3}$

(d) $x_4 \leqslant -x_1 - 3x_2 - \frac{3}{2}x_3 + x_5$; max UB = 4

(e) $x_5 \geqslant x_1 - 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_4$; min LB = -3

همینطور از محدودیت (۲) اطلاعاتی راجع به مقادیر متغیرها نمی توانیم کسب کنیم .

محدودیت (۳)

(۱–۱۸)

(a) $x_2 \leqslant -1 + 2x_3 - x_4 - x_5$; max UB =1

(b) $x_3 \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5$; min LB = $\frac{1}{2}$

(c) $x_4 \leqslant -1 - x_2 + 2x_3 - x_5$; max UB = 1

(d) $x_5 \leqslant -x_2 + 2x_3 - x_4$; max UB = 1

از نامعادله (b) می توانیم نتیجه گیری کنیم که $x_3 = 1$.

محاسبه حدود بر روی هر متغیر در هر محدودیت سرانجام منجر به پیدا شدن مقدار یک متغیر گردید. حال مقدار x_3 را درون شکل اولیه گذاشته وحدود بالا و پائین جدید را محاسبه می نمائیم . این کار را آنقدر انجام داده تا به جوابهای نهائی برای تمام متغیرها برسیم :

همانطورکه ملاحظه شد روش ارائه شده فوق برای مسائلی که دارای ابعاد بزرگتری هستند با کمی مشکل مواجه می باشد و محاسبه آن شاید تا حدودی خسته کننده باشد از طرفی معلوم نیست که بتوانیم اطلاعاتی راجع به حتی یکی از متغیرها نیز بدست آوریم .بوسطه این موضوع از الگاریتم بالاس (BALAS'Algorithm) استفاده می نمائیم .قبل ازتوضیح این الگاریتم یک شکل استاندارد برنامه ریزی صفر ـ یک را بررسی می نمائیم.

۲- شکل استاندارد مسائل برنامه‌ریزی صفر- یک

برای حل مسائل برنامه‌ریزی صفر - یک شکل خاصی را درنظرمیگیریم که کلی وعمومی بوده وباعث تسهیل درامرمحاسبه می گردد. این شکل استاندارددارای خصوصیات زیرمی باشد:

الف- تمام ضرائب درتابع آبژکتیو مثبت یا صفرباشد

ب - شکل تابع آبژکتیو بایدحداقل کننده باشد

ج - تمام محدودیتها بایدبه‌شکل زیرباشد:

$g_j \geqslant$ مقدارثابت

۱-۲- ضرائب منفی درتابع آبژکتیو

درمثالهائی که‌درقسمت ۱ ارائه گردیددرتابع آبژکتیو متغیرهائی که‌دارای ضرائب منفی باشندداشتیم. ولی درصورتیکه بعضی ازمتغیرها درتابع آبژکتیو دارای ضرائب منفی بودندرا به طریقی می توانیم حل کنیم. برای مثال مدل زیررا درنظربگیرید:

$$\min: \quad f = x_1 - 2x_2 + x_3 \tag{۲-۱}$$

$$S.To: \quad x_1 + x_2 \geqslant 1$$

برای حذف ضریب منفی متغیر x_2 یک متغیرجدیدی رابنام y_2 به‌شکل زیر معرفی می نمائیم:

$$y_2 = 1 - x_2$$

$$x_2 = 1 - y_2 \tag{۲-۲}$$

شکل جدیدتابع آبژکتیوبادرنظرگرفتن متغیرجدیدبشکل‌زیرخواهدبود:

$$x_1 - 2(1-y_2) + x_3 = x_1 + 2y_2 + x_3 - 2 \tag{۲-۳}$$

بدین ترتیب‌شکل کامل مسئله ماازقرارذیل خواهدبود:

$$\begin{aligned}
\min:\; & f = x_1 + 2y_2 + x_3 \\
\text{S.To:}\; & x_1 + (1-y_2) \geqslant 1 \\
& x_1 - y_2 \geqslant 0
\end{aligned} \qquad (۲-۴)$$

پس از حل مدل فوق، مقدار y_2 بدست خواهد آمد که توسط آن مقدار x_2 را می توانیم پیدا کنیم .

۲-۲- تابع آبژکتیو حداکثر کننده

برای تبدیل تابع آبژکتیو حداکثر کننده به یک تابع آبژکتیوی که حداقل کننده باشد می توانیم تابع آبژکتیو را در منفی یک ضرب کرده و شکل بدست آمده را حداقل کنیم بطور مثال فرض کنید که تابع آبژکتیو به شکل زیر باشد :

$$\max:\; f = 2x_1 + 5x_2 + 3x_4 + 2x_5 \qquad (۲-۵)$$

به جای حداکثر کردن تابع فوق تابع آبژکتیو زیر را حداقل می کنیم .

$$\min:\; -f = -2x_1 - 5x_2 - 3x_4 - 2x_5 \qquad (۲-۶)$$

که (۶-۲) معادل (۵-۲) می باشد . حالا همانطور که در مبحث قبل توضیح داده شد متغیرهائی که ضرائب منفی دارند را به متغیرهای با ضرائب مثبت تبدیل می کنیم .

۳-۲- محدودیتهای کوچکتر و محدودیتهای مساوی

برای تبدیل محدودیتهائی که به شکل $g_i \leqslant c_i'$ باشد به $g_i \geqslant c_i$، تمام متغیرها و مقادیر ثابت را به سمت چپ معادله برده و آنرا در منفی ضرب می کنیم در نتیجه علامت $\geqslant$ تبدیل به $\leqslant$ می شود بطور مثال :

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 5 \leqslant 0$$

(۲–۷)

$$-x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 5 \geqslant 0$$

(۲–۸)

(۲–۷) به (۲–۸) تبدیل شده که هردومعادل همدیگرمی باشند.

اگرمحدودیتها بهشکل مساوی باشندآنها رادرازاء هرمحدودیت مساوی می توان به محدودیت نا مساوی بهشکل زیرتبدیل نمود:

اگـــر

$$g_i = 0$$

(۲–۹)

میتوان(۲–۹) را بهشکل زیرنوشت:

(۲–۱۰)

$$\begin{cases} g_i \geqslant 0 \\ g_i \leqslant 0 \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} g_i \geqslant 0 \\ -g_i \geqslant 0 \end{cases}$$

روش فوق باعث افزایش تعدادمحدودیت می شودواین امردرزمانی که تعداد محدودیت های مساوی زیادترباشدمقرون به صرفه نیست. روش زیرازاین لحاظ کارآئی بیشتری رادارد:

اگرداشته باشیم:

(۲–۱۱)

$$\begin{cases} g_1 = c_1 \\ g_2 = c_2 \\ \vdots \\ g_n = c_n \end{cases}$$

(۱۱ـ۲) را به‌شکل زیرتبدیل می کنیم

(۲ـ۱۲)

$$\begin{cases} g_1 \geqslant c_1 \\ g_2 \geqslant c_2 \\ \vdots \\ g_n \geqslant c_n \\ \\ g_1 + g_2 + \cdots + g_n \leqslant c_1 + c_2 + \cdots + c_n \end{cases}$$

۴ـ۲ـ حذف یک متغیر

یکی ازمسائلی که‌درساده‌کردن مسئله کمک می نمایدحذف بعضی ازمتغیرها می باشد.برای اینکارروشی مانندمثال زیراتخاذمی کنیم اگرداشته‌باشیم:

(۲ـ۱۳)

$$x_1 + 5x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 \,,\, x_2 \,,\, x_3 = 0,1$$

محدودیت (۱۳ـ۲) رابرای x_1 حل می کنیم :

(۲ـ۱۴)

$$x_1 = 6 - 5x_2 - x_3$$

ازآنجائیکه $x_1 \geqslant 0$ می توانیم بنویسیم :

(۲ـ۱۵)

$$6 - 5x_2 - x_3 \geqslant 0$$

وهمینطورازآنجائیکه $x_1 \leqslant 1$ می باشدبازمی توانیم بنویسیم :

(۲ـ۱۶)

$$6 - 5x_2 - x_3 \leqslant 1$$

یا

(۲ـ۱۷)

$$5x_2 + x_3 \geqslant 5$$

پس محدودیت (۱۳ـ۲) به‌دومحدودیت (۱۷ـ۲) و (۱۵ـ۲) تبدیل شده‌ودراین بین متغیر x_1 حذف‌گردیده‌است .حالاتمام محدودیت‌ها رابرای x_1(کلیـــــه

محدودیتهائی که‌درآنها متغیر x_1 وجوددارد) مانندروش فوق حل می کنیــم. درتابع آبژکتیومتغیر x_1 رابامعادل آن که‌ازمحدودیتهای مساوی به‌دســت می آید(مانند (۱۴-۲))جایگزین می نمائیم .

۳- الگوریتم افزودنی بالاس

روش Egon Balas برای حل مسائل برنامه‌ریزی صفر-یک اولین بــار در مقولات تحقیق درعملیات‌عنوان گردید. درروش وی تمام جوابها صریحاً یـــا ضمنی شمرده‌ومعین می شوند.کارآئی این روش‌درانتخاب استراتژی منتخبـــی می باشدکه باانتخاب‌جوابهای معدودی جواب‌نهائی رابه دست می آورد.ایـــن امردرمقابل شمردن ومعین کردن کلیه جوابهای شدنی می باشد.

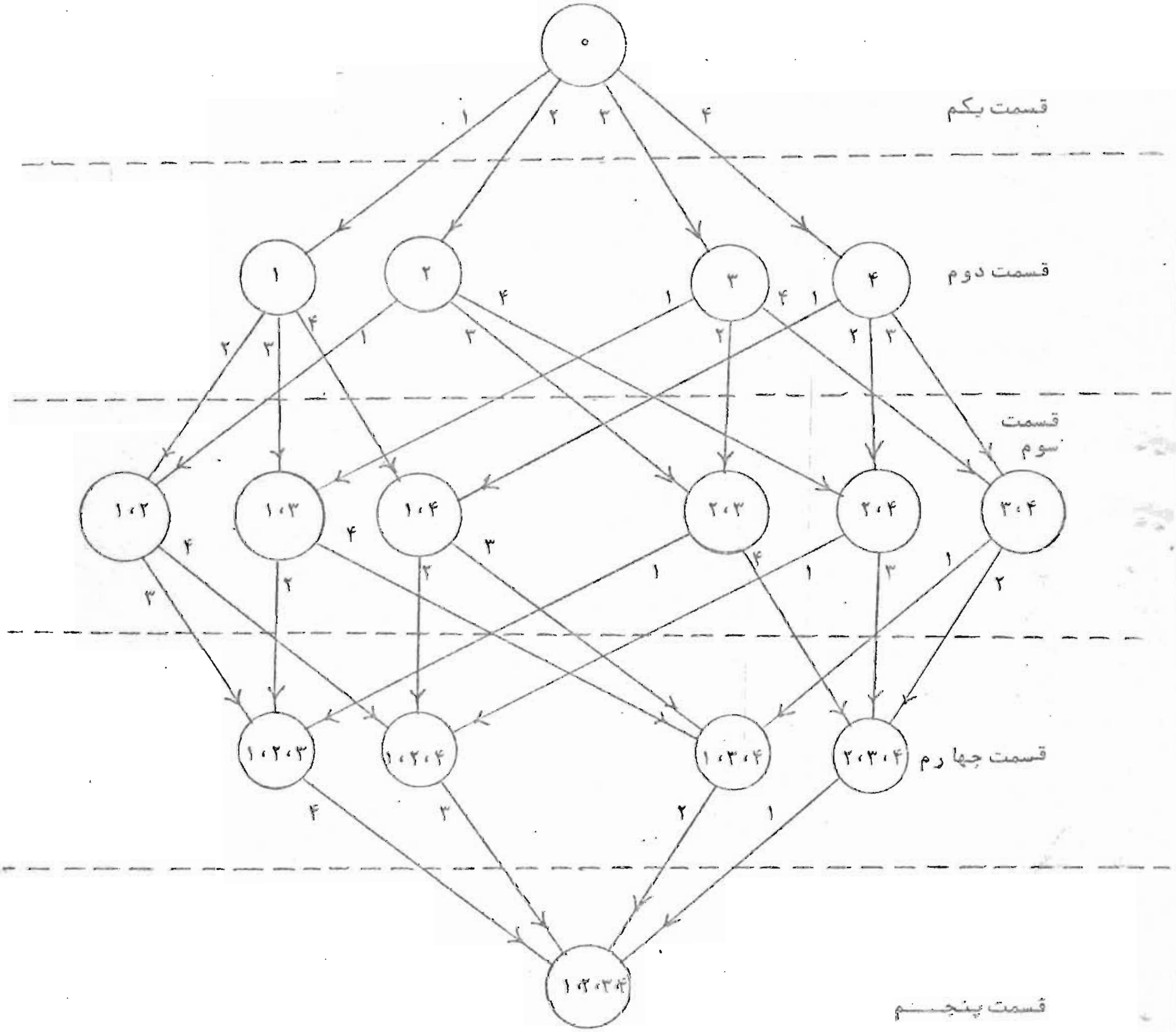
بطورکلی دریک مسئله برنامه‌ریزی صفر - یک می توان کلیه جوابهـــای شدنی ونشدنی راشمارش‌کرد برای مثال، نمونه‌های زیررادرنظربگیرید.

(۱-۳)

دو متغیر	سه متغیر	
(0 , 0)	(0,0,0)	(1,1,0)
(1 , 0)	(1,0,0)	(1,0,1)
(0 , 1)	(0,1,0)	(0,1,1)
(1 , 1)	(0,0,1)	(1,1,1)

زمانیکه تعدادمتغیرها چهاریا بیشتــرشودشمارش‌جوابهای ممکن خیلـــی غامض‌خواهدگردید.یک روش معمول برای شمارش جوابهای شدنی درشبکه ۱ نشان داده شده‌است. هرگـــره (node) درشبکه ۱ نشان دهنده یک‌جواب‌ازجوابهای ممکن است. عددی که همراه‌باهرگره (node) می باشدبیانگرشماره‌متغیریــا متغیرهائی است‌که‌دارای‌مقداریک درآن جواب می باشند.پس‌مقداربا قـــی متغیرها صفرمی باشد.برای رسم شبکه ازهرگره (node) برای هرمتغیرکـــه در دایره مبداء مقداریک‌نداردپیکانی رسم می کنیم.

شکل ۱ برای زمانی که دارای چهار متغیر باشد رسم شده است. برای اینکه اساس شبکه ۱ بوضوح روشن شود آنرا به چند قسمت تقسیم کرده‌ایم. گره‌ای که در قسمت یکم قرار دارد و روی آن عدد صفر می باشد نشان دهنده این است که مقدار تمام متغیرها صفر می باشد پیکان یک در قسمت یکم بیانگر شماره متغیری است که مقدر آن از صفر به یک تبدیل می شود پس در گره ۱ در قسمت دوم مقدار متغیرها برابر خواهد بود با $(1,0,0,0)$ یعنی $x_1 = 1$ و $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ همچنین در قسمت دوم گره‌ای که دارای شماره ۳ می باشد حامل جواب زیر است $(0,0,1,0)$ $x_3 = 1$ و $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ پیکانی که روی آن عدد ۲ قرار گرفته بیانگر این است که در گره 2,3 مقدار متغیر 2 از صفر به یک تغییر می کند پس در گره 2,3 جواب به شکل $x_2 = x_3 = 1$ و $x_1 = x_4 = 0$ می باشد همین قاعده در قسمت های بعدی اعمال می شود مثلا" گره‌ای که در قسمت چهارم اعداد 1 ,2,4 روی آن نوشته شده است جواب $x_3 = 0$ $x_1 = x_2 = x_4 = 1$ را بیان می نماید و بالاخره گره قسمت پنجم حاکی از آن است که $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.


قسمت یکم
قسمت دوم
قسمت سوم
قسمت چهارم
قسمت پنجم
۰
۱
۲
۳
۴
۱،۲
۱،۳
۱،۴
۲،۳
۲،۴
۳،۴
۱،۲،۳
۱،۲،۴
۱،۳،۴
۲،۳،۴
۱،۲،۳،۴

تصویر ۱

مهم ترین مطلبی که در روش شمارش ضمنی بکار گرفته می‌شود این است که فرض کنید در یک مسئله برنامه‌ریزی صفر - یک معین شده است که مثلاً "مقدار $x_4=1$ نشدنی می باشد. در این حالت کلیه جوابهائی که در آنها $x_4 = 1$ است حذف می شود. این امر باعث حذف تمام این جوابها در شبکه تصویر ۱ می‌شود. همانطورکه از تصویر ۲ پیداست کلیه پیکانهائی که از گره خارج می‌شوند خذف گردیده‌اند.

حال فرض کنید که جوابهای زیر شدنی هستند (ولی لزوما "اپتیمال نیستند)

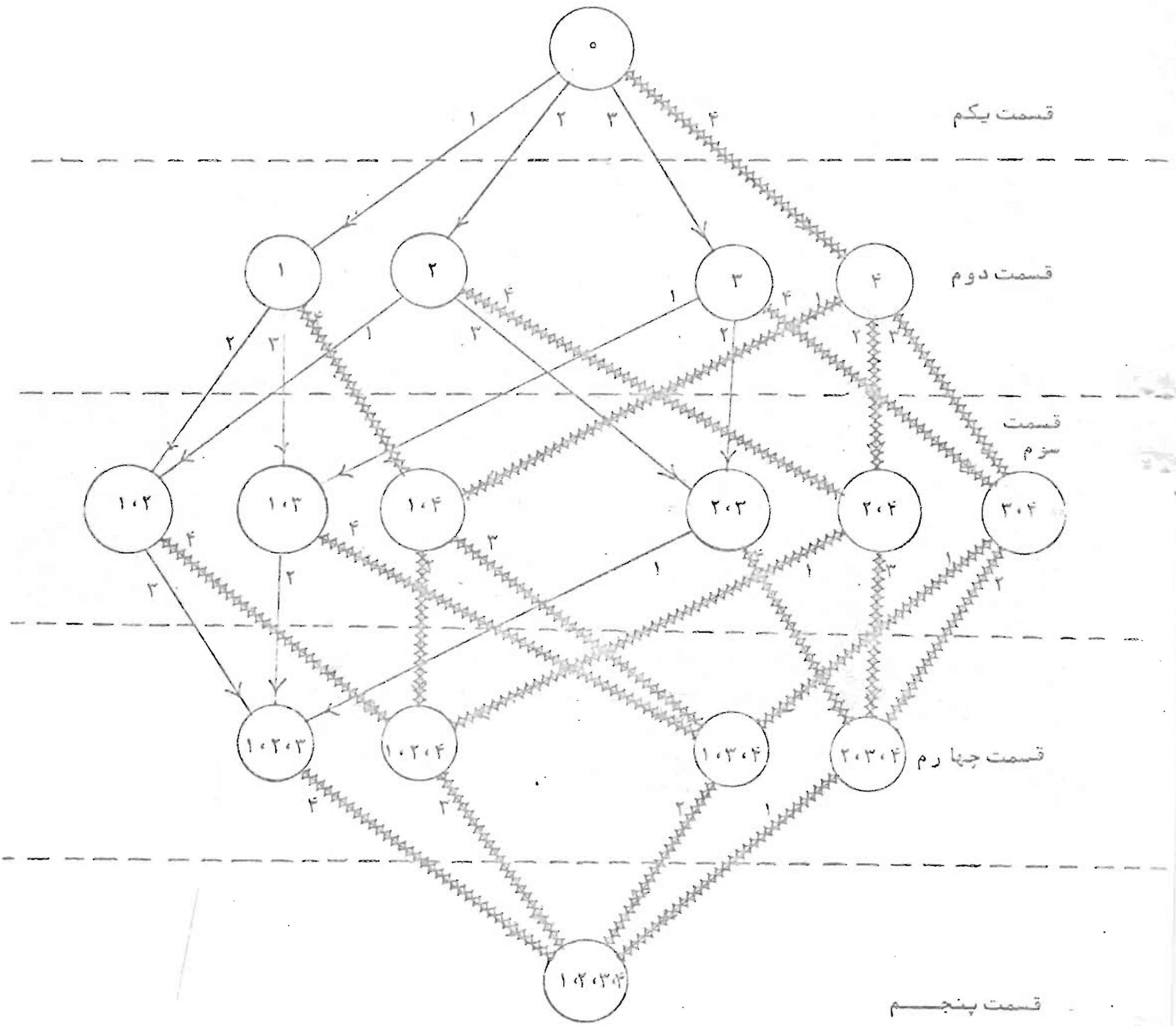
$$x_1 = 1 \qquad (۲-۳)$$

$$x_3 = 1$$

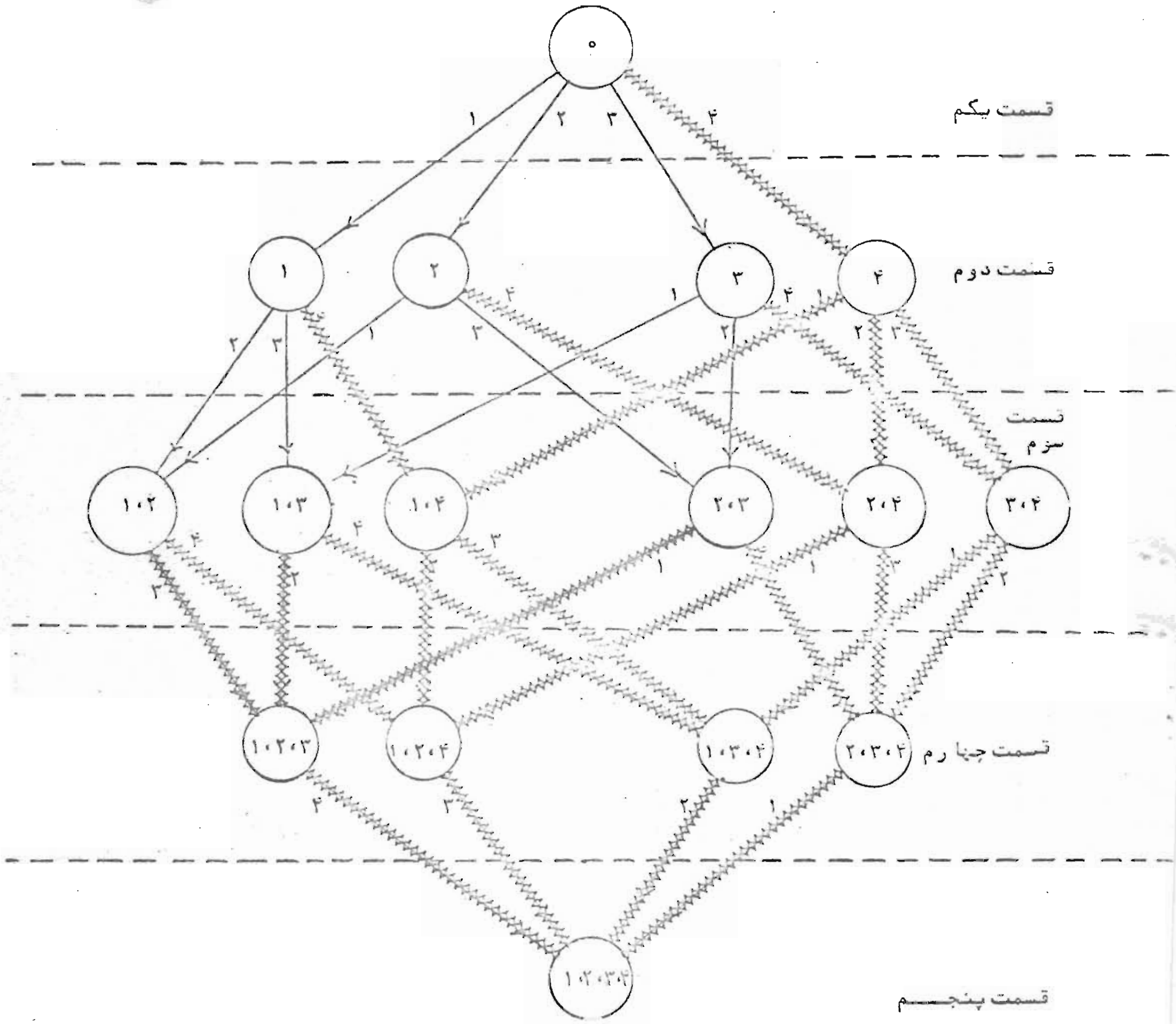
$$x_2 = 0$$

$$x_4 = 0$$

پس در این صورت می توانیم تمام جوابهائی را که توسط پیکانها از پائین به گره 1,3 متصل شده‌اند را حذف کنیم. تمام گره‌هائی که پائین تر از گره 1,3 باشند نشان دهنده این امر هستند که به یک متغیر اضافی به غیر از x_1، x_3 مقدار یک منصوب شده است تصویر ۲ نمایانگر این تغیرات می باشد.


قسمت یکم
قسمت دوم
قسمت سوم
قسمت چهارم
قسمت پنجم
۰
۱
۲
۳
۴
۱،۲
۱،۳
۱،۴
۲،۳
۲،۴
۳،۴
۱،۲،۳
۱،۲،۴
۱،۳،۴
۲،۳،۴
۱،۲،۳،۴

تصویر ۲



تصویر ۳

۲-۳- تکمیل جواب های جزئی

در روش بالاس همانطورکه گفته شد مجموعه ای از جواب ها حذف می شوند ویا به عبارت دیگر.

الف- تکمیل جوابهای جزئی به این شکل است که یک سری ازجوابها نشدنی هستند ویا

ب - تکمیل جوابهای جزئی به این شکل است که یک سری ازجوابها شدنی می باشند .

منظوراز تکمیل جوابهای جزئی ، مشخص نمودن مقدار صفر یا یک برای متغیرهائی است که مقدار جواب آنها درجواب های جزئی مشخص نشده اند. برای مثال، فرض کنیدکه همانطورکه درقسمت قبل گفته شد مقدار متغیر x_4 نباید یک باشد . بنابراین یک جواب جزئی این است که x_4 مساوی صفرباشد. حال این جواب جزئی را می توانیم با دادن مقادیرصفرویک به هرکدام از متغیرهای باقی مانده تکمیل کنیم . همینطوراگرجواب جزئی $x_3=x_1=1$ باشد تکمیل آن به شکل زیراست :

$$\begin{array}{l}(1,0,1,0)\\(1,1,1,0)\\(1,1,1,1)\\(1,0,1,1)\end{array}\qquad (۳-۳)$$

یا به عبارت دیگر

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad (۳-۴)$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

۳-۳- کنترل مسیرهای محاسبه

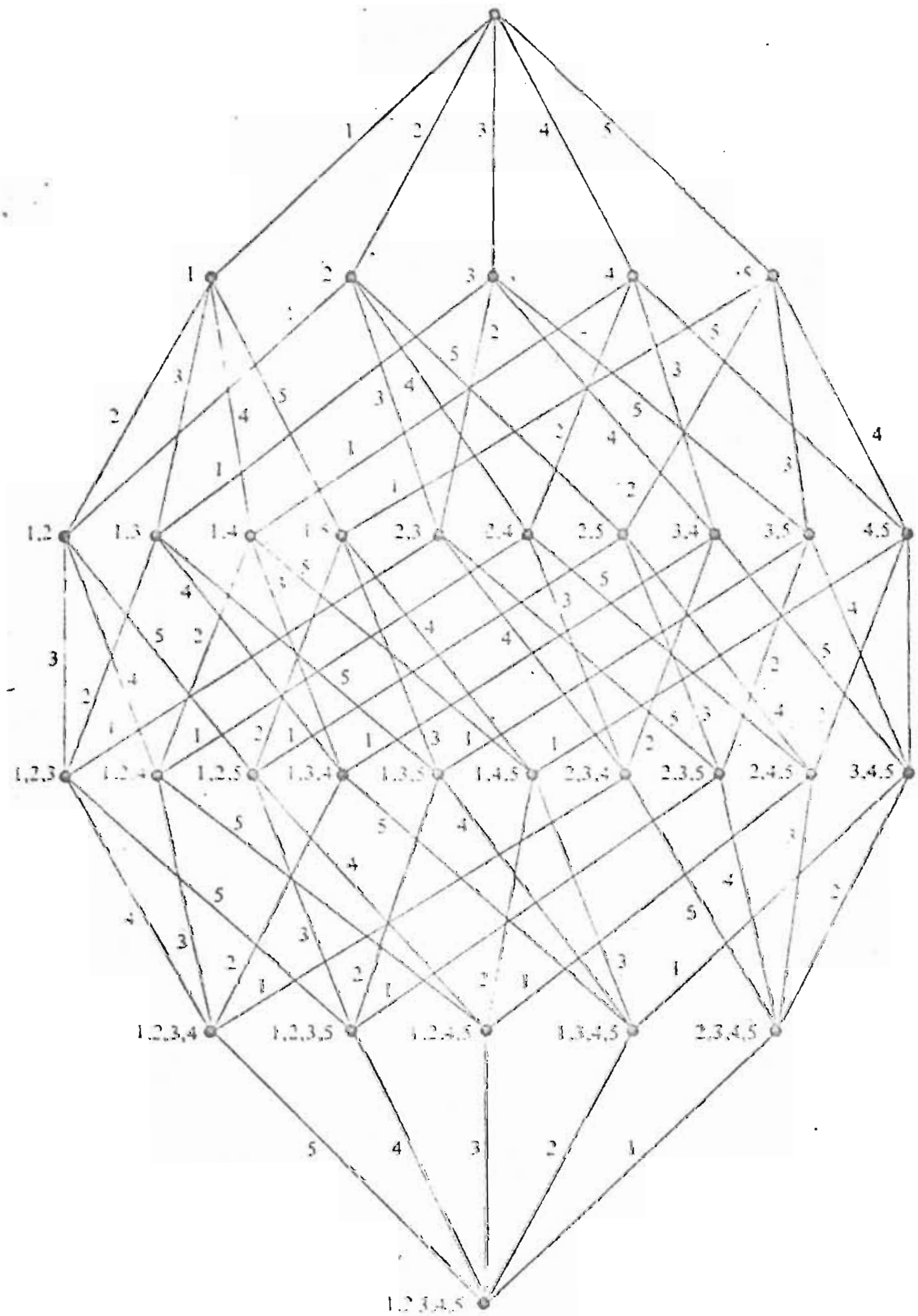
روشی که در شبکه یک برای بررسی 2^n جواب در یک مسئله برنامه ریزی صفر- یک ارائه شد کاملا" سیستماتیک می باشد و باعث جلوگیری از دوباره کاری می شود. در روشی که شمارش جوابها بر مبنای انتخاب یک سری جوابها باشد باید برای اینکه کارآئی محاسباتی بالا رود از دوباره شماری جوابها اجتناب نمود. این امر در الگوریتم بالاس برای جلوگیری کردن از محاسبات دوباره بکار گرفته شده. بدین ترتیب که یک جواب شدنی (ولی نه لزوما" اپتیمال) از جوابهای جزئی پیدا شده است در کنترل مسیرهای محاسبه ما یکی از متغیرهای جواب جزئی را با تکمیل آن جایگزین می کنیم. پس اگر فرض کنیم که یک جواب $x_1=x_3=1$، باقی متغیرها مساوی صفر، یک جواب شدنی باشد (ولی نه لزوما" اپتیمال)؛ برای شمارش صریح - ضمنی جوابها، باید جواب $x_1=1, x_3=0$ را بررسی نمائیم. بطور وضوح، در میان تمام تکمیل های جوابهای جزئی $x_1=1, x_3=0$ تکمیل جواب جزئی $x_1=1, x_3=1$ ظاهر نخواهد گردید، پس از دوباره کاری در محاسبه جلوگیری خواهد شد.

حال برگردیم مسئله (۱۰-۱) که دارای ۵ متغیر می باشد. بطورکلی برای مسئله (۱۰-۱) سی و دو جواب را می توانیم بشماریم. این ۳۲ جواب در شبکه ۴ نمایان و همینطور در جدول ۱ آورده شده اند. محدودیتهای (۱۰-۱) را با روشهائی که در قبل توضیح داده شد به شکل محدودیتهای $i=1,2,3$ و $g_i \geqslant 0$ تبدیل می نمائیم.

$$(1)\; g_1 = -2 + x_1 - 3x_2 - 5x_3 + x_4 - 4x_5 \geqslant 0$$

$$(2)\; g_2 = -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 \geqslant 0 \qquad (۵-۲)$$

$$(3)\; g_3 = -1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 \geqslant 0$$


1
2
3
4
5
1,2
1,3
1,4
1,5
2,3
2,4
2,5
3,4
3,5
4,5
1,2,3
1,2,4
1,2,5
1,3,4
1,3,5
1,4,5
2,3,4
2,3,5
2,4,5
3,4,5
1,2,3,4
1,2,3,5
1,2,4,5
1,3,4,5
2,3,4,5
1,2,3,4,5

تصویر ۴

شمارهٔ جواب	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	شدنی؟
۱	۰	۰	۰	۰	۰	نه
۲	۰	۰	۰	۰	۱	نه
۳	۰	۰	۰	۱	۰	نه
۴	۰	۰	۰	۱	۱	نه
۵	۰	۰	۱	۰	۰	نه
۶	۰	۰	۱	۰	۱	نه
۷	۰	۰	۱	۱	۰	نه
۸	۰	۰	۱	۱	۱	نه
۹	۰	۱	۰	۰	۰	نه
۱۰	۰	۱	۰	۰	۱	نه
۱۱	۰	۱	۰	۱	۰	نه
۱۲	۰	۱	۰	۱	۱	نه
۱۳	۰	۱	۱	۰	۰	بله
۱۴	۰	۱	۱	۰	۱	نه
۱۵	۰	۱	۱	۱	۰	نه
۱۶	۰	۱	۱	۱	۱	نه
۱۷	۱	۰	۰	۰	۰	نه
۱۸	۱	۰	۰	۰	۱	نه
۱۹	۱	۰	۰	۱	۰	نه
۲۰	۱	۰	۰	۱	۱	نه
۲۱	۱	۰	۱	۰	۰	نه
۲۲	۱	۰	۱	۰	۱	نه
۲۳	۱	۰	۱	۱	۰	نه
۲۴	۱	۰	۱	۱	۱	نه
۲۵	۱	۱	۰	۰	۰	نه
۲۶	۱	۱	۰	۰	۱	نه
۲۷	۱	۱	۰	۱	۰	نه
۲۸	۱	۱	۰	۱	۱	نه
۲۹	۱	۱	۱	۰	۰	بله
۳۰	۱	۱	۱	۰	۱	نه
۳۱	۱	۱	۱	۰	۱	نه
۳۲	۱	۱	۱	۱	۱	نه

جدول ۱

پس شکل کامل (۵-۳) از قرار ذیل خواهد بود :

$$\min : f = 5x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 3x_4 + x_5 \qquad (۳-۶)$$

$$\text{S.To: } (1)\ g_1 = -2 + 1x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 1x_4 - 4x_5 \geqslant 0$$

$$(2)\ g_2 = 0 - 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 \geqslant 0$$

$$(3)\ g_3 = -1 + 0x_1 - 1x_2 + 2x_3 - 1x_4 - 1x_5 \geqslant 0$$

$$(4)\ g_4 = x_j = 0\ ,\ 1 \qquad j = 1, \ldots ,5$$

حال جواب یک درجدول ۱ را درنظرمی گیریم . این جواب بالاترین گره درتصویر ۴ می باشد . قبل ازبررسی این جواب یک سری حروف را برای نمایش تغییرات مراحل محاسبه تعریف می نمائیم .

S_k بیان کننده مجموعه متغیرهائی است که درمرحله K مقادیرمشخصی را بخود گرفته اند .برای مثال فرض کنیدکه دومین جواب جزئی $x_4=1$ و $x_3=0$ است ودنبال راهی می گردیم که این جواب جزئی را تکمیل کنیم .پس حالا باید این جواب جزئی را دریک جائی نگهداریم مثل $S_2=(4\ ,\ -3)$ عضوهائی را که درمجموعه S نگهداری می کنیم نشان دهنده شماره متغیرهائی است که درجواب جزئی Kام مقادیررا کسب کرده اند .اگرجلوهرکدام ازشماره ها علامت منفی وجودداشت،نشان دهنده این است که آن متغیر درجواب جزئی در مرحله K ام مقدارش برابرصفراست . درغیراین صورت مقدارمتغیربرابریک است .

V_k بیانگر مجموعه محدودیتهای نقض شده می باشد، زمانیکه تمام متغیرهائی که در جواب مقدماتی S_k وجودندارند مساوی صفر قرار داده شوند (متغیرهای آزاد).

T_k

T_k بیانگر مجموعه متغیرهائی است که اولاً آزاد باشند (یعنی در مجموعه S_k نباشند) وثانیاً " درحداقل یک محدودیت V_k دارای ضرائب مثبت باشند. برای مثال، اگر زمانیکه تمام توابع محدودیت ها در S_k ارزیابی می شوند باقرار دادن تمام متغیرها مساوی صفر تکمیل شوند پس اگر فرض کنیم محدودیتهای g_3 و g_6 نقض شده باشد متغیرهای x_1 و x_2 درمحدودیت g_3، x_1 ، x_4 در محدودیت g_6 ضرائب مثبت داشته باشند ،سپس $T_k = (1,4,5)$

$\bar{X}$

عبارت از بهترین جواب که تا بحال پیدا شده می باشد بدین معنی که جواب شدنی که تا بحال پیدا شده وکمترین مقدار را برای f پدیدمی آورد. بدین ترتیب اگر در یک مسئله پنج متغیره مجموعه جواب $x_1=0$ و $x_2=x_3=1$ و $x_4=x_5=0$ شدنی باشد وباعث پائین ترین مقدار برای f گردد (از میان جوابهای شدنی تا بحال بدست آمده)، $\bar{x}$ برابرخواهد بود با $\bar{x} = (0,1,1,0,0)$

$\bar{Z}$

معرف مقدار f درزمانی که تابع آبژکتیو در $\bar{x}$ ارزیابی شده است می باشد. حال دوباره برگردیم به مسئله (۳-۶) روش حل به شکل زیرخواهد بود :

۴-۳- مرحله صفر

اولین جواب جزئی را S_o نامگذاری میکنیم پس :

$S_o = \emptyset$

$S_o = \emptyset$ بدین معنی است که S_o یک مجموعه تهی می باشد ،چون هیچ متغیری دراین مرحله مقداری بخودنگرفته است . اگراین جواب جزئی را با قراردادن تمام متغیرهای آزادآن مساوی صفرتکمیل کنیم پس $f=0$ می شود. حال کنترل می کنیم که آیا محدودیتی نقض شده یا نه پس :

$$\begin{array}{llllllll} & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline (1)\ g_1 = -2 & + 1(0) & -3(0) & + 5(0) & + 1(0) & - 4(0) & & = -2 \ngeqslant 0 \end{array}$$

$$(2)\ g_2 = 0 - 2(0) + 6(0) - 3(0) - 2(0) + 2(0) = 0 \geqslant 0$$

$$(3)\ g_3 = -1 + 0(0) - 1(0) + 2(0) - 1(0) - 1(0) = -1 \ngeqslant 0$$

ازجدول فوق مشخص است که محدودیت ۱و۳ نقض شده اندپس $V_o = (1, 3)$ ، متغیرهای آزاددراین محدودیتها با ضرائب مثبت ازقرارذیل هستند :

درمحدودیت (۱) : x_4, x_3, x_1

درمحدودیت (۳) : x_3

بنابراین $T_o = (1, 3, 4)$. اگربخواهیم جواب شدنی راپیداکنیم بایدیکی یا چندتاازمتغیرهای این مجموعه به یک تبدیل شود. برای اینکه بسنجیم که کدام تکمیل S_o ممکن است شدنی باشد ، بایستی محدودیت های نقض شده را آزمایش کنیم یعنی مقدارمتغیرهائی که درمجموعه T_o هستندبه یک افزایش یابد . اگراین متغیرهنوزباعث آن شودکه یک باهردومحدودیت (۱)و(۳) نقض شوند ،هیچ تکمیل S_o شدنی نمی باشد .

• محدودیت اول رادرنظربگیرید .باتکمیل S_o یعنی قراردادن متغیرهای x_1 و x_3 و x_4 مساوی یک وسایرمتغیرها مساوی صفرخواهیم داشت :

$$g_1 = -2 + 1(1) - 3(0) + 5(1) + 1(1) - 4(0) = 5 \geqslant 0$$

درمحدودیت سوم با تکمیل S_o یعنی قراردادن متغیر x_3 مساوی یک وسایر متغیرها مساوی صفرخواهیم داشت :

$$g_3 = -1 + 0(1) - 1(0) + 2(1) - 1(0) - 1(0) = 1 \geqslant 0$$

چون هیچکدام ازمحدودیت ها نقض نمی شوندپس ممکن است بعضی ازتکمیلهای دیگر S_o هنوز شدنی باشد .

همانطورکه قبلا" اشاره شددراین روش هردفعه یک متغیربه S_k اضافه می شود تا بجواب نهائی برسیم . حال سؤال این است که ،کدام متغیرازمتغیرهائی که در T_o هستندبایدبه یک افزایش یابند ؟ برای اینکه یکدسته ازجوابها را حذف کنیم (رجوع شودبه مبحث ۲-۳) بایدتکمیل جوابهای جزئی طوری باشدکه یا یک سری ازجوابها شدنی باشندویا نشدنی . ازآنجائیکه می توانیم یکدسته ازجواب ها رادرصورت پیداکردن جواب شدنی حذف کنیم بایددنبال متغیری در T_o بگردیم که ما را به نزدیکترین حوالی جواب شدنی برساند . برای پیدا کردن چنین متغیری بایدتوجه داشت که متغیری که دریک محدودیت دارای ضریب مثبت می باشدنمی تواندبه شدنی بودن آن محدودیت آسیبی برساندچون تمام محدودیتها بزرگتریا مساوی صفرهستند . ازطرفی متغیری که دریک محدودیت دارای ضریب منفی میباشدکمکی به شدنی کردن آن محدودیت نمی کند . ازجهت دیگر اگرمتغیری دریک محدودیت دارای ضریب مثبت ودرمحدودیت دیگری دارای ضریب منفی باشد ، اضافه کردن آن به جواب جزئی دربعضی ازمحدودیتها کمک کننده ودربعضی دیگرآسیب رساننده به شدنی بودن محدودیت ها میشود .

برای اینکه یک معیارکلی برای ورودیک متغیربه جواب جزئی داشته باشیم تمام ضرائب در محدودیتها را برای هرمتغیردر T_o بررسی می کنیم . ازبین متغیرها آن یکی راانتخاب می کنیم که مجموع ضرائب آن درتمام محدودیتها ازهمه بزرگترباشد . پس در T_o این مجموع برابرخواهدبودبا :

x_1 برای : $+1 - 2 + 0 = -1$

x_3 برای : $+2 -3 + 2 = +4$

x_4 برای : $+1 -2 -1 = -2$

واضح است که میان متغیرهای مجموعه T_o افزایش x_3 به یک پرجاذبه‌تر است .

۵-۳- مرحله یک

بنابراین x_3 را به S_o اضافه می کنیم پس $S_1=(3)$؛ بدین معنی که در جواب جزئی که الان موردبررسی قرار می گیرد متغیر x_3 برابر یک است وتمام متغیرهای دیگرآزادهستند .

حال اگردرمحدودیت های مسئله تمام متغیرهای آزاد را مساوی صفرو x_3 را مساوی یک قراردهیم فقط محدودیت دوم نقض می شود :

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad x_1 \qquad\quad x_2 \quad x_3 \qquad x_4 \qquad x_5 \\
\hline
g_1 = -2 + 1(0) -3(0) + 5(1) + 1(0) - 4(0) = 3 \geqslant 0 \\
g_2 = 0 - 2(0) + 6(0) -3(1) -2(0) + 2(0) = -3 \ngeqslant 0 \\
g_3 = -1 + 0(0) -1(0) + 2(3) -1(0) -1(0) = 5 \geqslant 0
\end{array}
$$

همانطورکه قبلا" گفته شد متغیرهای آزاددریک یا چندمحدودیت نقض شده دارای ضرائب مثبت هستندرا مشخص می کنیم چون متغیرهای x_2، x_5 این خصوصیت رادارندپس : $T_1=(2, 5)$

اگرجواب جزئی S_1 را با افزایش متغیرهای موجوددر T_1 به یک تکمیل کنیم محدودیت (۲) نقض نمی شود :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$g_2 = 0$	$-2\ (0)$	$+\ 6(1)$	$-3(1)$	$-2(0)$	$+\ 2(1)$	$= 5 \geqslant 0$

حال باید تصمیم گرفت که کدام متغیر در T_1 کمک کننده تری باشد پس مجموع ضرائب متغیرها را در محدودیت ها بدست می آوریم .

برای x_2 : $-3 + 6 - 1 = +2$

برای x_5 $-4 + 2 - 1 = -3$

۶-۳- مرحله ۲

بنابراین متغیر x_2 را انتخاب می کنیم چون مجموع ضرائب آن در محدودیتها نسبت به سایر متغیرهای T_1 از همه بیشتر است پس x_2 را وارد مجموعه S_1 کرده و مجموعه S_2 را تشکیل می دهیم . $S_2 = (3\ و\ 2)$. مجموعه S_2 بیانگر این است که در این جواب جزئی $x_3 = x_2 = 1$ می باشد .

حال در محدودیت‌های مسئله تمام متغیرهای آزاد مجموعه S_2 را مساوی صفر قرار داده و x_2 و x_3 را مساوی یک قرار می دهیم .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$g_1 = -2$	$+\ 1(0)$	$-3(1)$	$+\ 5(1)$	$+\ 1(0)$	$-4(0)$	$= 0 \geqslant 0$
$g_2 = 0$	$-2(0)$	$+\ 6(1)$	$-3(1)$	$-\ 2(0)$	$+2\ (0)$	$= 3 \geqslant 0$
$g_3 = -1$	$+\ 0(0)$	$-1(1)$	$+2(1)$	$-1(0)$	$-1(0)$	$= 0 \geqslant 0$

چون هیچکدام از محدودیتها نقض نشدند پس جواب S_2 شدنی می باشد پس

$\bar{X} = (0,1,1,0,0)$

در $\bar{X}$ مقدار $\bar{Z}$ برابر خواهد بود با :

$$\bar{Z} = f = 5(0) + 7(1) + 10(1) + 3(0) + 1(0) = 17$$

از آنجائیکه هر مجموعه جواب دیگری که در آن $x_3 = x_2 = 1$ باشد و یک یا چند تا از متغیرهای دیگر به یک افزایش داده شوند باعث ایجاد $\bar{z} > f$ می شود پس $\bar{X}$ جواب اپتیمال نیز هست. بدین ترتیب تمام جوابهای پائین گره پنجم از ردیف سوم شبکه ۴ به صورت ضمنی شمارش شده اند.

۷-۳- بازگشت به عقب

همانطورکه دیده شد با پیدا کردن خصوصیات یک سری از جواب ها می توانیم بطور ضمنی باقی جواب ها را بشماریم این امر از دو طریق صورت می گیرد یکی پیدا کردن تکمیل مفرشدنی برای آنها ، دیگر اینکه ثابت کنیم تکمیل شدنی برای آن جواب وجود ندارد.

قسمت عمده ای از شبکه حذف شده ، حالا باید قسمت های دیگر را حذف کنیم. ممکن است بطور دلخواه عقب برگردیم وگره ای را در ردیف دوم انتخاب کنیم ، جوابیکه آن گره بدما میدهد را بررسی می کنیم که آیا آن جواب باعث حذف قسمتهائی از شبکه می شود یا خیر. در این روش ممکن است جوابهائی که قبلاً" آزمایش شده اند دوباره مورد آزمایش قرار گیرند . برای اجتناب از این دوباره کاری یک راه این است که متغیرهائی که در مجموعه S_2 هستند مورد آزمایش قرار گیرند . بدین صورت که آخرین متغیری که به S اضافه شده را با تکمیل (صفر) آن جایگزین می کنیم .

در مسئله ما x_2 آخرین متغیری است که به S اضافه شده است پس :

۸-۳- مرحله ۳

بنابراین به عقب برمی گردیم وجواب جزئی $S_3 = (3 , -2)$ را بررسی کنیم

این جواب بیانگر $x_3 = 1$ و $x_2 = 0$ و باقی متغیرهای آزاد مساوی 0 میباشد. چون x_2 را مساوی صفر قرار دادیم پس دیگر هیچ وقت به دسته جوابهائی که قبلا" رسیده ایم برنخواهیم گشت چون در تمام جوابهائی که قبلا" آزمودیم $x_2 = 1$ بود. مانند قبل آزمایش می کنیم که با جواب S_3 که تکمیل آن (قرار دادن تمام متغیرهای آزاد مساوی صفر) محدودیتی نقض می شود یا خیر:

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad x_1 \qquad x_2 \qquad x_3 \qquad x_4 \qquad x_5 \\
\hline
g_1 = -2 +1(0) -3(0) + 5(1) + 1(0) -4(0) = 3 \geqslant 0 \\
g_2 = 0 -2(0) + 6(0) -3(1) -2(0) + 2(0) = -3 \ngeqslant 0 \\
g_3 = -1+0(0) -1(0) + 2(1) -1(0) -1(0) = 1 \geqslant 0
\end{array}
$$

محدودیت g_2 نقض می شود. اگر محدودیت g_2 شدنی می بود، x_5 تنها متغیر آزاد با ضریب مثبت در محدودیت g_2 باید از صفر به یک افزایش پیدا می کرد. پس $T_3 = (S)$ اما واضح است که افزایش x_5 به یک، محدودیت g_2 را بزرگتر از صفر نخواهد کرد. چون

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad x_1 \qquad x_2 \qquad x_3 \qquad x_4 \qquad x_5 \\
\hline
g_2 = 0 -2(0) +6(0) -3(1) -2(0) + 2(1) = -1 \ngeqslant 0
\end{array}
$$

پس نتیجه می گیریم که هیچ تکمیل شدنی S_3 وجود ندارد. بدلیل این امر می توانیم تمام گره هائی که از پائین به گره سوم ردیف دوم شبکه ۴ متصل می شوند را حذف کنیم یعنی کلیه این جوابها بصورت ضمنی شمارش شده اند. گرچه این موضوع شامل جوابهائی نیز می شود که قبلا" در جواب S_2 بطور ضمنی شمارش شده بودند.

دوباره بازگشت به عقب می کنیم تا جوابهای بیشتری را شمارش کنیم. قبلا" جوابهائی را شمردیم که در آن $x_3=1$ و $x_2=1$ وهمچنین $x_2=1$ و $x_3=0$ بود. اگر حالا بتوانیم کلیه جوابهائی که در آن $x_3=0$ و $x_2=1$ وهمچنین $x_2=0$ و $x_3=0$ باشد

را بشماریم تمام ۳۲ جواب را شمارش کرده‌ایم چون ترکیب دیگری از x_2 و x_3 وجود ندارد.

برای این کار با توجه به روشی که اخیراً توضیح داده شد، $x_3 = 0$ را درنظر می‌گیریم و این سئوال را مطرح می‌کنیم: آیا جوابهای جزئی که در آن $x_3 = 0$ می‌توانند شمارش شود؟ اگر بله پس جوابهای جزئی $x_3 = 0$ و $x_2 = 1$ وهچنین $x_2 = 0$ و $x_3 = 0$ شمارش شده‌اند. بنابراین $S_4 = (-3)$ قرار می‌دهیم.

۹-۳- مرحله ۴

با $S_4 = (-3)$ وتکمیل آن با قرار دادن تمام متغیرهای آزاد (شامل x_2) مساوی صفر، محدودیت اول وسوم نقض می‌شوند:

$$\begin{array}{l}
\qquad\quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \\
\hline
g_1 = -2+1(0) -3(0) + 5(0) + 1(0) -4(0) = -2 \ngeq 0 \\
g_2 = 0 -2(0) + 6(0) -3(0) -2(0) +2(0) = 0 \geq 0 \\
g_3 = -1 + 0(0) -1(0) + 2(0) -1(0) -1(0) = -1 \ngeq 0
\end{array}$$

متغیرهای آزاد (متغیرهای غیر از x_3) با ضرائب مثبت در محدودیتهای یک وسه، x_1 و x_4 هستند، پس $T_4 = (1, 4)$. باید توجه داشت که با تکمیل S_4 بطوریکه تمام متغیرهائی که در محدودیت ۳ دارای ضرائب مثبت هستند (به غیر از x_3) به یک افزایش یابند، محدودیت سوم هنوز نقض شده می‌باشد (توجه کنید که هیچ متغیری غیر از x_3 در محدودیت ۳ دارای ضریب مثبت نیست). پس نتیجه می‌گیریم که هیچ تکمیلی از S_4 شدنی نیست. بدین ترتیب کلیه جوابهائی را که در آنها $x_3 = 1$ می‌باشد وهمچنین جوابهائی را که در آنها $x_3 = 0$ می‌باشد را که تمام ۳۲ جواب می‌باشد شمارش شده‌اند. پس جواب اپتیمال به شکل

زیرخواهدبود.

$$X^* = (0 , 1 , 1 , 0 , 0)$$

$$Z^* = 17$$

۱۰-۲- روش کلی

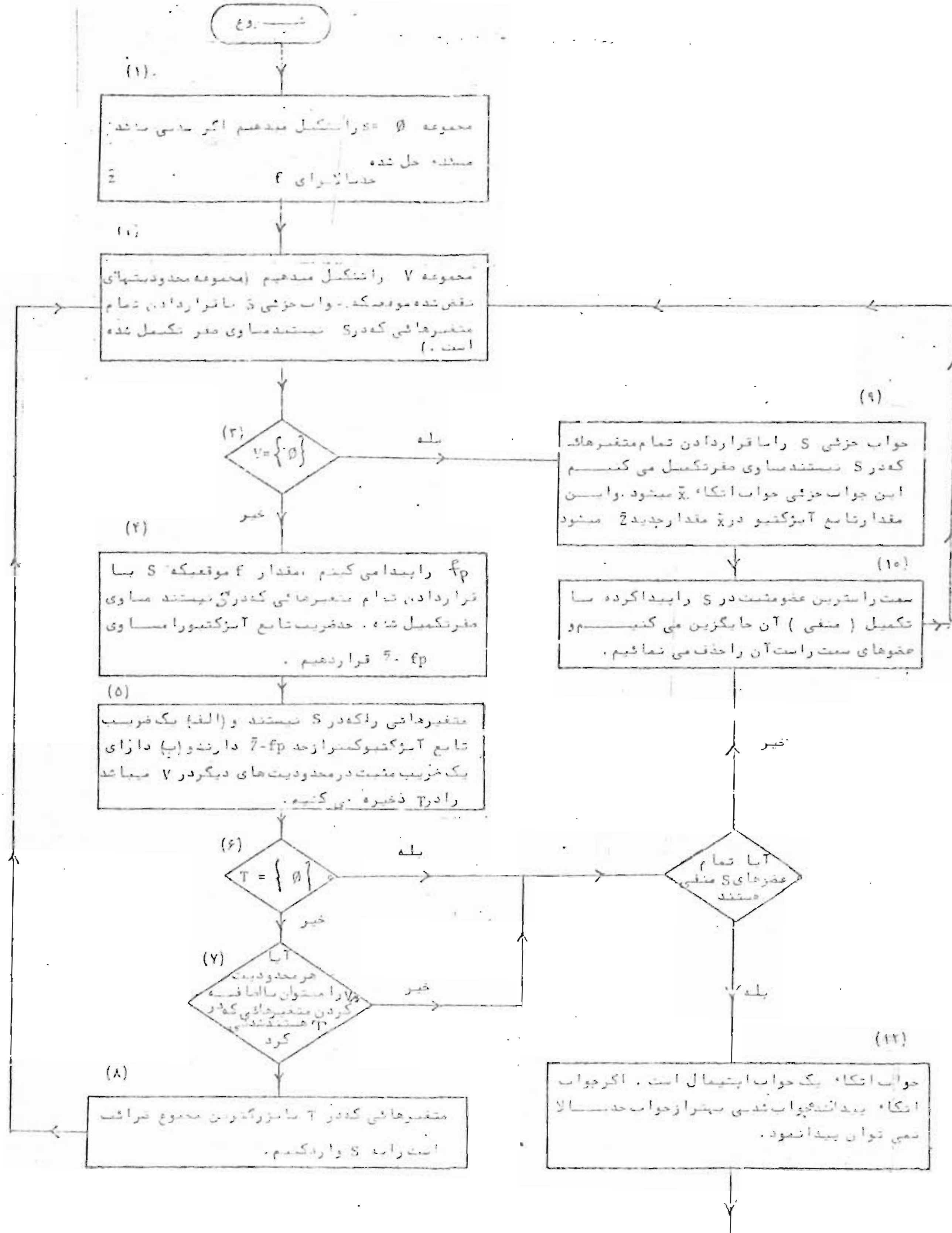
با توجه به مراحل فوق شروع می کنیم به بیان شکل کلی حل مسائل برنامه ریزی صفر- یک با استفاده از الگاریتم بالاس. مجموعه S را بصورت یک مجموعه تهی تشکیل می دهیم . محدودیت های نقض شده را در V مشخص می کنیم . متغیرهائی که افزایش آنها به یک ممکن است آنها را به جواب شدنی نزدیک کند در T ذخیره می شوند ، اگر ممکن باشد که هر محدودیت در V را با اضافه کردن متغیرهائی که در T هستند شدنی کنیم ، متغیری که در T " کمک کننده ترین " میباشد (با مقایسه مجموع ضرائب هر متغیر در تمام محدودیت ها) را به S اضافه می کنیم .

این روش را ادامه میدهیم تا به یک جواب جزئی برسیم که باعث حذف گره ها از بالا یا پائین بشود بدین ترتیب که آن جواب شدنی باشد یا نشدنی . در این نقطه بازگشت به عقب می نمائیم . هر عضو در S که هنوز با تکمیلش در جواب جزئی جایگزین نشده با علامت " مثبت " بیان میشود و هر عضو در S که تکمیل شده باشد با علامت " منفی " بیان میگردد .

پس روش کلی ما بر این خواهد بود که عضو سمت راست در S که تا بحال تکمیل نشده را تکمیل کنیم . بدین معنی که سمت راست ترین عضو مثبت در S را پیدا کرده و آن را با تکمیل (صفر) آن جایگزین نمائیم . در این مرحله لازم است که هر عضوی در S را به نفع متغیری که اخیرا " تکمیل شده است حذف کنیم . بدین معنی که عضوهای سمت راست متغیری را که با منفی آن جایگزین می کنیم حذف شود .

یک تکنیک دیگر اضافی را باید خاطرنشان سازیم که به روش کلی اضافه می کنیم تا بتوانیم انتخاب متغیر بعدی برای واردشدن به S را کاراتر سازد . فرض کنید که جوابی را به نام " جواب اتکاء " معرفی می نمائیم و

ومقدار آن برابر با $\bar{Z}=20$ باشد. وهمچنین فرض کنید که تکمیل جواب جزئی S ، یک تابع آبژکتیو با مقدار ۱۸ را دارا باشد. هیچ وقت اضافه کردن متغیری با یک ضریب ۲ در تابع آبژکتیو به مجموعه S کمک چندانی نخواهد کرد چون برای چنین جواب جزئی پیدا کردن یک مقدار f بهتر از مقدار جواب اتکاء غیرممکن است. این قاعده را به روش کلی خود اضافه می کنیم : متغیری را که دارای یک ضریب در تابع آبژکتیو باشد و باعث آن شود که یک مقدار تابع آبژکتیو بیشتر یا مساوی با مقدار اخیر $\bar{z}$ به ما بدهد را وارد مجموعه T نباید کرد. شمای روش کلی در فلوچارت تصویر ۵ ارائه گردیده است و در تصویر ۶ نیز جدولی برای روش حل عملی برای دنبال کردن مراحل مختلف این الگاریتم ارائه شده است.



فلوچارت برای مسائل برنامه ریزی مفرک از طریق شمارش ضمنی
تصویر ۵

$\tilde{Z}$	ورود به S	محدودیتهایی که برقرار کرده اند	T	حد ضریب تابع ابژکتیو	V	S	مرحله
(۹)	(۸)	(۷)	(۵)	(۴)	(۲)	و(۸) و یا (۱۰) (۱)	

اعداد داخل پرانتز اشاره به اعداد روی اشکال تصویر ۵ دارد ..

تصویر ۶

۱۱-۳- یک مسئله برنامه‌ریزی صفر- یک ده متغیره

برای اینکه الگاریتم بالاس روشن‌ترشود- به یک مثال می پردازیم .

$$\min : f= 10x_1 + 7x_2 + x_3 + 12x_4 + 2x_5 + 8x_6 + 3x_7 + x_8 + 5x_9 + 3x_{10} \qquad (۳-۷)$$

S.To:

(1) $-2-3x_1+12x_2+8x_3-1x_4+0x_5+0x_6+0x_7+0x_8+7x_9-2x_{10} \geqslant 0$

(2) $-1+0x_1-1x_2+10x_3+0x_4+5x_5-1x_6-7x_7-1x_8+0x_9+0x_{10} \geqslant 0$

(3) $-1-5x_1+3x_2+1x_3+0x_4+0x_5+0x_6+0x_4+2x_8+0x_9-1x_{10} \geqslant 0$

(4) $1+5x_1-3x_2-1x_3+0x_4+0x_5+0x_6+0x_7-2x_8+0x_9+1x_{10} \geqslant 0$

(5) $-3+0x_1+0x_2+4x_3+2x_4+0x_5+5x_6-1x_7+9x_8+2x_9+0x_{10} \geqslant 0$

(6) $-7+0x_1-9x_2+0x_3+12x_4+7x_5-6x_6-0x_7-2x_8-15x_9-3x_{10} \geqslant 0$

(7) $-1+8x_1-5x_2-2x_3+7x_4+1x_5+0x_6+5x_7+0x_8+10x_9+0x_{10} \geqslant 0$

$X_j = 0 , 1 \qquad j = 1, 2, \ldots ,10$

مقدار بی نهایت را برای $\bar{z}$ به منظور ارزیابی جوابهای شدنی که بعداً" به دست خواهندآمد درنظرگرفته می شود (جعبه ۱ شکل ۵). همچنین ممکن است که یک حدبالای واقعی تربرای $\bar{z}$ درنظربگیریم .بدین شکل که به تمام متغیرهـــا در تابع آبژکتیو مقدار یک داده شود .

ازطرفی دیگرمجموعه S_0 راتهی درنظرمیگیریم بدین ترتیب که تمام متغیرها

دارای مقدار صفرهستند. سپس معیار " کمک کننده " را با جمع ضرائب هرمتغیر درتمام محدودیت ها محاسبه می کنیم. با این معیار می توانیم معین کنیم که کدام متغیردر T بایدوارد S شود. این مجموع ازقرارزیرخواهدبود.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
S	-3	20	20	13	-2	-3	6	34	-5

حالا (جعبه ۲ تصویر۵) باید تعین کنیم که کدام محدودیت ها با تکمیل صفر نقض می شوند.

$g_1 = -2 \ngeq 0$

$g_2 = -1 \ngeq 0$

$g_3 = -1 \ngeq 0$

$g_4 = 1 \geqslant 0$

$g_5 = -3 \ngeq 0$

$g_6 = -7 \ngeq 0$

$g_7 = -1 \ngeq 0$

بدین ترتیب $V=\{1,2,3,5,6,7\}$. چون مجموعه V تهی نیست از لوزی (۳) به جعبه (۴) درتصویر۵ می رویم. دراین مرحله درشمارش ضمنی هیچ جواب شدنی پیدا نشده است بنا براین حدضریب تابع آبژکتیو بینهایت می باشد. به جعبه ۵ می رویم، متغیرهائی که درمحدودیت های نقض شده دارای ضرائب مثبت هستند x_1، x_2، x_3، x_4، x_5، x_6، x_7، x_8، x_9 رادر T_o ذخیره می کنیم. اگرچه

متغیر x_{10} دارای ضریب 0+دربعضی ازمحدودیتهای نقض شده میباشد نباید در T_o نمایان گردد (چون صفریک ضرئب مثبت نیست وعلامت + نشان دهنده جمع می باشد). لوزی ۶ درتصویر ۵ ما رابه جعبه (۷) هدایت می کندچون T تهی

نیست . درجعبه (۷) بایدمعین کنیم که آیا تکمیل شدنی برای این جواب جزئی ممکن است یا خیر . درهرمحدودیت نقض شده ، متغیرهائی راکه در T هستندودارای ضرائب مثبت درآن محدودیت می باشندرا به یک افزایش می‌دهیم. اگریک محدودیتی هنوز نقض‌شده‌باشد (باتمام متغیرهای T باضرائب مثبت که‌به‌یک افزایش داده شده‌اند) هیچ تکمیل شدنی این جواب ممکن نیست .

با $So = \emptyset$ ، بدین ترتیب تکمیل شده :

$g_1 = 25 \geqslant 0$

$g_2 = 14 \geqslant 0$

$g_3 = 5 \geqslant 0$

$g_5 = 19 \geqslant 0$

$g_6 = 27 \geqslant 0$

$g_7 = 30 \geqslant 0$

چون هیچ محدودیتی نقض‌شده‌به جعبه (۸) می رویم . درجعبه (۸) از میان متغیرهای T متغیری راکه ازهمه‌کمک‌کننده ترمی باشدراانتخاب می کنیم. این کاررابااستفاده ازمجموع ضرائب متغیرهادرمحدودیت ها انجام می دهیم. چون این معیاربرای x_9 برابربا ۳۴ بوده‌وازهمه بزرگتر است x_9 راانتخاب می کنیم که‌بایدبه مجموعه S واردشودتاجواب جزئی S_1 را ایجادکند این مراحل درتصویر ۷ نمایان می باشد .

مرحله		V	حدضریب تابع ابژکتیو	T	محدودیتهایی که برقرار نشده اند	ورود به S	$\bar{Z}$
0	Ø	123567		123456789			9
1	g	235		234568			3
2	g 3	Ø					6
				یک جواب شدنی (0, 0,1,0,0,0, 0,0,1,0)			
3	g- 3	235	1	Ø			
4	-g	123567	6	3578		3	
5	-g3	6 7	5	57		5	
6	-g 35	7	3	Ø			
7	-g 3-5	67	5	7	6		
8	-g-3	123567	6	578	1		

آخرین جواب شدنی جواب اپتیمال است .

تصویر ۷

با تکمیل S_1 توسط قراردادن تمام متغیرهای آزاد مساوی صفر محدودیتهای زیر بدست خواهد آمد :

$g_1 = 5 \geqslant 0$

$g_2 = -1 \ngeqslant 0$

$g_3 = -1 \ngeqslant 0$

$g_4 = 1 \geqslant 0$

$g_5 = -1 \ngeqslant 0$

$g_6 = 8 \geqslant 0$

$g_7 = 9 \geqslant 0$

پس $V_1 = (۲ و ۴ و ۵)$ به جعبه (۵) می رویم ، متغیرهائی که دارای ضریب مثبت دریکی از محدودیت های نقض شده می باشد را در T ذخیره می کنیم .

$T_1 = (۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۸)$.

به جعبه (۷) می رویم . تمام متغیرهائی که در T دارای ضرائب مثبت در محدودیت نقض شده (۲) میباشند را به یک افزایش می دهیم ، نتیجه $g_2 = 14 \geqslant 0$ می شود . سراغ محدودیت (۳) می رویم ، تمام متغیرهائی را که در T دارای ضرائب مثبت در محدودیت نقض شده (۳) میباشند را به یک افزایش می دهیم ، نتیجه $g_3 = 5 \geqslant 0$ می شود ، با عمل مشابه بر روی محدودیت نقض شده (۵) نتیجه $g_5 = 19 \geqslant 0$ می شود . پس متوجه میشویم که هنوز بعضی از تکمیل های S_1 شدنی می باشد . به جعبه (۸) می رویم . با نگاهی به جدول مجموع ضرائب واضح است که x_3 و x_4 کاندیداهای خوبی برای ورود به S می باشند . x_3 را انتخاب می کنیم چون دارای ضریب کوچکتری در تابع آبژکتیو می باشد . پس $S_2 = S_1 + x_3 = (۳ و ۹)$

به‌جعبه (۲) برمی گردیم با تکمیل S_2 یعنی قراردادن تمام‌متغیرهای آزاد مساوی صفرمی بینیم‌که‌هیچ محدودیتی نقض‌نمی شود :

$g_1 = 13 \geqslant 0$

$g_2 = 9 \geqslant 0$

$g_3 = 0 \geqslant 0$

$g_4 = 0 \geqslant 0$

$g_5 = 3 \geqslant 0$

$g_6 = 8 \geqslant 0$

$g_7 = 7 \geqslant 0$

پس $V = \{\emptyset\}$.تهی بودن V باعث می شودکه به‌جعبه ۹ برویم واولین جواب‌شدنی راثبت‌کنیم .

$$\bar{Z} = 10(0) + 7(0) + 1(1) + 12(0) + 2(0) + 8(0) + 3(0) + 1(0) + 5(1) + 3(0) = 6$$

$$\bar{X} = (0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0)$$

به‌جعبه (۱۰) می رویم وسمت‌راست‌ترین عضودر S رابا تکمیل منفی آن جایگزین می کنیم پس (۳- و۹) = S ، بدین معنی که‌می خواهیم جواب جزئی $x_3 = 0$ و $x_9 = 1$ راامتحان کنیم (مرحله ۳ تصویر۷) . به‌جعبه (۲) می رویم با S_3 وتکمیل آن توسط قراردادن تمام متغیرهای آزادمساوی صفرمحدودیتهای g_2 , g_3 , g_5 نقض می شوند .

$g_1 = 5 \geqslant 0$

$g_2 = -1 \ngeqslant 0$

$g_3 = -1 \ngeqslant 0$

$g_4 = 1 \geqslant 0$

$g_5 = -1 \ngeqslant 0$

$g_6 = 8 \geqslant 0$

$g_7 = 9 \geqslant 0$

لوزی ۳ ما را به جعبه ۴ راهنمائی می کندکه اولین وقتی است که حد ضریب تابع آبژکتیو را بصورت معنی دار آزمایش کنیم . ازآنجائیکه S_3 تنها متغیر x_9 را به یک افزایش می دهد $f_p=5$ می شود. جواب اتکا $\bar{z}=6$ است. هر متغیری که برای T درنظرگرفته شود باید دارای ضریب تابع آبژکتیو کمتر از $6-5=1$ باشد.

درجعبه (۵) به این نتیجه می رسیم که مجموعه T تهی نمی باشدزیرا هیچ متغیری یک ضریب تابع آبژکتیو کمتر ازحد یک ندارد . پس این جواب باعث حذف دسته‌ای ازجواب های دنبال خودمی شودچون هیچ تکمیلی ازاین جواب جزئی را نمی‌توان یافت که ما را به جواب شدنی که دارای $\bar{z}$ کمتری باشدهدایت کند . بدین ترتیب لوزی (۶) ما را به لوزی (۱۱) می فرستد. دربررسی لوزی (۱۱) به این نتجیه می رسیم که چون تمام عضوهای S_3 منفی نیستند باید به جعبه (۱۰) برویم .

اینجا بهتر است که مروری برکارهائی که تابحال کرده‌ایم بکنیم . یک جواب شدنی با $x_9=x_3=1$ وباقی متغیرها مساوی صفرپیداکرده‌ایم . میدانیم که افزایش هرمتغیردیگری به یک هیچوقت باعث کاهش f نخواهدشد. بنابراین بصورت ضمنی تمام جوابهائی راکه با $x_9=x_3=1$ تکمیل می شوندرا شمارش

کرده‌ایم . درمرحله بعد (مرحله شماره ۳) تمام جوابهائی راکه‌درآنهــــا $x_9 = 1 \; , \; x_3 = 0$ بودرانیزبررسی نمودیم . این جواب جزئی باعث حــــذف تعدادی ازجوابهاشدچون تکمیل بهتری برای آن نمی توان یافت .پس‌تابحال تمام جوابهائی راکه $x_9=1$ و $x_3=1$ وهمچنین تمام جوابهائی راکه $x_9=1$ و $x_3=0$ یاکلیه جوابهائی که‌شامل $x_9=1$ است راشمرده‌ایم . قدم بعدی ملاحظه نیمـــه دیگر می باشد ،یابه عبارت‌دیگرکلیه جوابهائی که‌شامل $x_9=0$ است . جعبه (۱۰) دقیقا" این موضوع رابه ما می گوید پس‌جواب‌جزئی $S_4 = (-9)$ جوابی است که بایدبررسی شود پس :

$g_1 = -2 \ngeqslant 0$

$g_2 = -1 \ngeqslant 0$

$g_3 = -1 \ngeqslant 0$

$g_4 = 1 \geqslant 0$

$g_5 = -3 \ngeqslant 0$

$g_6 = -7 \ngeqslant 0$

$g_7 = -1 \ngeqslant 0$

و $V = (1,2,3,5,6,7)$. با یک حدضریب تابع آبژکتیوبرابرباشد(کوچکترین جواب‌شدنی) می توانیم متغیرهای x_6 , x_4 , x_2 , x_1 راازبررسی های آینده خود حذف‌کنیم . ازمتغیرهای باقی مانده ، آنهائی راکه‌دربعضی ازمحدودیتهـــای نقض‌شده‌ضریب مثبت‌دارندرادر T ذخیره می کنیم . $T = (3,5,7,8)$.

درلوزی ۷ هرمحدودیت‌در V رابه‌تنهائی امتحان می کنیم . بدین شکل که‌معین می نمائیم کدام‌محدودیت را می توان بااضافه کردن متغیرهائی که‌در T وجوددارندشدنی کرد. (این عمل راباافزایش‌هرمتغیر عضو T که دارای ضریب مثبت‌درمحدودیت‌نقض‌شده می باشد ،به‌یک انجام می دهیم)

$g_1 = 6 \geqslant 0$

$g_2 = 14 \geqslant 0$

$g_3 = 2 \geqslant 0$

$g_4 = 0 \geqslant 0$

$g_5 = 1 \geqslant 0$

$g_6 = 0 \geqslant 0$

$g_7 = 5 \geqslant 0$

تمام محدودیت‌ها برقرار شده‌اند، متغیر x_3 را انتخاب می کنیم که باید به S_4 واردشود تا S_5 تشکیل گردد.

مرحله ۵ نیزهمانند فوق اجرا می گردد ودرآخرمتغیر x_5 را برای ورودبه S_6 معرفی می نمایدکه $S_6=(-9,3,5)$.روش را با جعبه (۲) مرحله ۶ دنبال می کنیم .محدودیت g_7 تنها عضومجموعه V می شود . حدضریب تابع آبزکتیو را پیدا می کنیم ، x_3 و x_5 قبلاً مقدار ۳ را برای f_p ایجادکرده بودندپس $3=(6-3)$ حدجدید می باشد .درمحدودیت g_7 متغیرهای x_1 و x_4 و x_5 و x_7 و x_{10} ضرائب مثبت دارند . ولی هیچکدام ازاین متغیرها را نمی توان در T جای داد چون حدضریب تابع آبزکتیومتغیرهای x_1 و x_4 و x_7 و x_{10} را حذف می کند و متغیر x_5 را نیزنمی‌توان در T جای دادچون در S موجوداست . بنابراین به لوزی ۱۱ وسپس جعبه ۱۰ (بازگشت به عقب) برای بررسی مسیرهای محاسباتی قبلی می رویم . با جایگزین کردن متغیر ۵ با ۵- در S_6 ، S_7 را تشکیل داده ومرحله ۷ آغاز می شود.

ادامه کاردوباره از جعبه ۲ ومرحله هفت شروع می شود .محدودیت g_6 ، g_7

درمجموعه V قرار می گیرند. تنها متغیر x_7 هم یک ضریب تابع آبژکتیو کمتر از حد هم یک ضریب مثبت در محدودیتهای مجموعه V دارد، اگر محدودیت g_6 را آزمایش کنیم می بینیم که هیچ متغیری در T وجود ندارد که دارای ضریب مثبت باشد. بنابراین ممکن نیست با وجود T که داریم بتوان این محدودیت را برقرار ساخت. بنابراین لوزی ۷ ما را به جعبه ۱۱ هدایت می کند و باعث می شود که با استفاده از جواب جزئی S_7 بتوانیم جوابهای دنباله آن را شمارش کنیم. جعبه ۱۰ با بازگشت به عقب به سمت راست ترین عضو مثبت در S_7 که x_3 بوده و جایگزینی آن با تکمیل (صفر) آن، S_8 را ایجاد می نماید.

درمرحله ۸، محدودیتهای g_1, g_2, g_3, g_5, g_6 , g_7 نقض می شوند. با یک حد ضریب تابع آبژکتیو برابر با شش، تنها متغیرهای x_5, x_7, x_8 عضوهای T هستند. با آزمایش محدودیت های نقض شده، می بینیم که با وجود T که داریم محدودیت g_1 برقرار نمی شود. پس خصوصیات جواب S_8 کاملاً" شناخته شد. لوزی ۷ ما را به لوزی ۱۱ و سپس به جعبه ۱۲ هدایت می کند. چون تمام متغیرها در S_8 علامت منفی دارند. پس کار تمام شده و جواب اتکا جواب اپتیمال می باشد. بدین ترتیب :

$f^* = 6$

$x_1^* = 0$

$x_2^* = 0$

$x_3^* = 1$

$x_4^* = 0$

$x_5^* = 0$

$x_6^* = 0$

$x_7^* = 0$

$x_8^* = 0$

$x_9^* = 1$

$x_{10}^* = 0$

منطق بکاربرده‌شده درمراحل یک، ودو وسه‌را قبلا" بیان کردیم. درمراحل مذکورتمام جوابهائی که درآنها $x_9 = 1$ بوررا بررسی نمودیم. درمرحله چهار تا ۸ تمام جوابهائی راکه‌درآنها $x_9 = 0$ بود رابررسی کردیم. پس تمام جوابهای ممکن توسط روش شمارش ضمنی ملاحظه شدند.

منطق بکارگرفته شده درمراحل ۴ تا ۸ بدین ترتیب بودکه درمرحله ۶ دیدیم که‌هیچ تکمیل یک جواب بدون x_9 ولی با x_3 و x_5 نمی‌توانندبهتراز جواب اتکای اخیرباشد. درمرحله هفت دیدیم که‌هیچ تکمیلی ازیک جواب با x_9 و x_3 وبدون x_5 شدنی نیست. بدین ترتیب درمرحله ۶ و ۷ تمام جوابهائی راکه‌بدون x_9 و با x_3 باشندبطور ضمنی شمارش شدند. درمرحله ۸ مشخص شدکه هرجوابی بدون x_3 و x_9 جواب خوبی نمی توانندباشدپس درمراحل ۴تا ۸ درحقیقت تمام جوابها با x_9 وبدون x_9 بررسی شدند. ازآنجائیکه تمام جوابها با وبدون x_9 بررسی شدندپس تمام جوابهای شدنی بررسی شده‌اندوبهترین جواب مشخص شده دراین جستجوجواب اپتیمال است.

شایدحل این مسئله ازطریق روش شمارش ضمنی خیلی خسته کننده به‌نظر برسد، ولی بایدتوجه داشت‌که اگر بخواهیم این مسئله راازطریق روش شمارش صریح حل کنیم باید $2^{10} = 1024$ جواب راآزمایش‌کنیم ازطرفی درهیچ زمانی ازعملیات جبری به‌غیرازجمع وتفریق استفاده‌نشد. کامپیوتربانهایت سرعت می توانندعملیات جمع وتفریق راانجام دهدواین الگاریتم به‌دلیل جذابیت محاسباتی که‌دارد" الگاریتم افزودنی " نامیده‌می شود.

۴ـ همگرائی سریع تر با استفاده از محدودیتهای جانشین

روش شمارش ضمنی همواره درعمل به دنبال کشف جواب است تا بدست آوردن جواب. درسال ۱۹۶۵ گلوور (Glover) نشان داد که کشف جواب در روش شمارش ضمنی را می‌توان با اضافه کردن محدودیتهای جانشین تسریع نمود.

درخیلی از مسائل برنامه‌ریزی صفر ـ یک، ممکن است بتوان اطلاعات بیشتری را در ترکیب محدودیتها بدست آورد. اگر بتوانیم ترکیب خوبی از محدودیتها ایجاد نموده وآنها را به‌عنوان محدودیت‌های جانشین وارد کنیم با سرعت بیشتری میتوان جواب اپتیمم را پیدا کرد. آرتور جئوفریون و اگون بالاس (Arthur Geoffrion Egon Balas) نشان داده‌اند که برای تعیین قوی‌ترین محدودیت جانشین می توان الگاریتم سیمپلکس برنامه‌ریزی خطی را بکار گرفت. این روش برای حل مسائل برنامه‌ریزی صفر ـ یک بسیار بزرگ مورد استفاده زیادی دارد.

۱ـ۴ـ محدودیت‌های جانشین در برنامه‌ریزی خطی صفر ـ یک

با رجوع به‌تصویر ۵، در لوزی ۷ یک جواب جزئی S داده شده است. هر محدودیت را آزمایش می کنیم. اگر به‌تمام متغیرهای مجموعه T با ضرائب مثبت در هرکدام از محدودیت‌ها مقدار یک و به باقی مقدار صفر را بدهیم آیا هنوز آن محدودیت نقض شده است؟ اگر یک محدودیت نقض شود می فهمیم که تکمیل شدنی جواب جزئی S وجود ندارد و بازگشت به عقب می کنیم.

باید توجه داشت که در اکثر اوقات این آزمون در نشان دادن عدم وجود تکمیل شدنی جواب جزئی S وقتی که جواب شدنی هم وجود ندارد با شکست روبرو می شود.

برای مثال دو محدودیت زیر را درنظر بگیرید :

$$g_1 = -x_1 + 4x_2 - 2 \geqslant 0 \qquad (۴-۱)$$

$$g_2 = 3x_1 - 2x_2 - 2 \geqslant 0 \qquad (۴-۲)$$

اگردرمحدودیت g_1 مقدار x_2 را برابریک قراردهیم g_1 برقرارمی گردد وهمینطور اگردرمحدودیت دوم مقدار x_2 را مساوی صفرو x_1 را مساوی یک قراردهیم محدودیت g_2 نیزبرقرارمی گردد. به هرحال هیچ ترکیبی از x_1 و x_2 هردو محدودیت را برقرارنخواهدکرد. به عبارت دیگرهیچ تکمیل شدنی برای S وجود ندارد. آزمونی که درلوزی ۷ تصویر ۵ انجام میگیرد این واقعیت را روشن نخواهدساخت. نشدنی بودن تکمیل تمام جوابهای جزئی S پیدا نخواهدشد مگر اینکه قدم های بیشتری را درفلوچارت ۵ برداریم.

پس دراین زمینه بایدکارآئی الگوریتم شمارش ضمنی را بیشترکنیم یک محدودیتی ایجادمی کنیم که تمام اطلاعاتی راکه دویا چند محدودیت بطور مجزا نمی توانندبه ما بدهندرا بدهد. محدودیت های جانشین دقیقاً " این کار را انجام می دهند. یک نوع ازمحدودیت های جانشین محدودیتهای ترکیبی می باشد.

۲-۴- محدودیتهای ترکیبی

دومحدودیت زیررا درنظربگیرید.

$$g_1 \geqslant 0 \qquad (۴-۳)$$

$$g_2 \geqslant 0 \qquad (۴-۴)$$

چون توابع محدودیت g_1 و g_2 غیرمنفی هستندمجموع آنها نیزغیرمنفی میباشد:

$$g_1 + g_2 \geqslant 0 \qquad (۴-۵)$$

هر مجموعه‌ای از مقادیر جواب‌ها که دو محدودیت g_1 و g_2 را برقرار سازد مجموع آنها را نیز برقرار خواهد ساخت. برای مثال مجموع (۴-۱) و (۴-۲) به شکل زیر خواهد بود:

$$g_1 = -x_1 + 4x_2 - 2 \geqslant 0 \qquad (۴-۶)$$

$$g_2 = 3x_1 - 2x_2 - 2 \geqslant 0 \qquad (۴-۷)$$

$$g_1 + g_2 = g_3 = 2x_1 + 2x_2 - 4 \geqslant 0 \qquad (۴-۸)$$

توجه کنید که محدودیت (۴-۸) آزمون لوزی ۷ تصویر ۵ را خواهد گذراند. ولی باز بطور کلی معلوم نیست که محدودیت‌هائی از قبیل (۴-۸) بتوانند آزمون مذکور را بگذرانند. شاید اگر به محدودیت‌ها وزن های مختلفی را منصوب کنیم بتوانیم محدودیت ترکیبی مطلوب را بیابیم. به محدودیتهای (۴-۶) و (۴-۷) وزن های یک را منصوب کردیم و (۴-۸) را بدست آوردیم. اگر g_1 و g_2 غیرمنفی باشند، مادامیکه U_1 و U_2 مثبت هستند عبارت زیر غیرمنفی خواهد بود.

$$U_1 g_1 + U_2 g_2 \geqslant 0 \qquad (۴-۹)$$

مقادیر $U_1 = 2$ و $U_2 = 1$ را امتحان می کنیم.

$$g_1 = 2\,(-x_1 + 4x_2 - 2) \geqslant 0 \qquad (۴-۱۰)$$

$$g_2 = 1\,(3x_1 - 2x_2 - 2) \geqslant 0 \qquad (۴-۱۱)$$

$$g_1 + g_2 = g_3 = x_1 + 6x_2 - 6 \geqslant 0 \qquad (۴-۱۲)$$

محدودیت (۴-۱۲) نیز آزمون لوزی ۷ را می گذراند. حال فرض کنید $U_2 = 1$ و $U_2 = 2$.

$$g_1 = 1\ (-x_1 + 4x_2 - 2) \geqslant 0 \qquad (۴-۱۳)$$

$$g_2 = 2\ (3x_1 - 2x_2 - 2) \geqslant 0 \qquad (۴-۱۴)$$

$$g_1 + g_2 = g_3 = 5x_1 + 0x_2 - 6 \geqslant 0 \qquad (۴-۱۵)$$

محدودیت (۱۵-۴) درآزمون لوزی ۷ شکست می خورد . با توجه به محاسبات فوق توانستیم‌سه نوع‌محدودیت ترکیبی ایجادکنیم که آخرین آنها (۱۵ -۴) از دوتای اولی قوی تربود .اگردریک جواب جزئی یک مسئله برنامه‌ریزی صفر- یک بعضی ازتکمیل های شدنی آن جواب‌جزئی ممکن باشد ، هیچ محدودیت ترکیبی نمی‌توان ایجادکردکه درآزمون لوزی ۷ شکست بخورد .پس چیزی که‌احتیاج داریم یک روشی است‌که بتواندمجموعه وزن های U_i راطوری مشخص‌کندکه‌باعث ایجاد قوی ترین محدودیت ترکیبی شود (به عبارت‌دیگرمحدودیتی که‌بتوان درآزمون لوزی ۷ شکست بخورد .)

قبل ازتوضیح این روش‌بایدبه خاطرداشت‌که‌روش‌دیگری برای ایجاد محدودیتهای ترکیبی این است‌که یک محدودیت را با محدودیتی که‌ازتابع آبزکتیوبه‌دست می آیدباهم ترکیب‌نمائیم که‌باعث ایجادیک محدودیت مورد استفاده‌تری می شود .

فرض‌کنیددرلوزی ۷ هستیم بهترین جواب‌شدنی دراین نقطه یک مقدار $\bar{Z}$ برای تابع آبزکتیوبدست می دهد .اگرجواب‌شدنی بهتراز این جواب‌داشته باشیم محدودیت زیرصادق خواهدبود .

$$\bar{Z} - f > 0 \qquad (۴-۱۶)$$

که f مقدارتابع آبزکتیوباجواب‌شدنی بهترمی باشد . محدودیت (۱۶-۴) محدودیت جدیدی خواهدبودکه‌می توانیم آن‌راباِ محدودیتهای (۱۳-۴) و (۱۴-۴) همراه کنیم :

$$g_1 \geqslant 0 \qquad (۴-۱۷)$$

$$g_2 \geq 0$$

$$\bar{Z}-f > 0$$

قوی ترین محدودیت ترکیبی ما به شکل زیر می شود :

$$U_1 g_1 + U_2 g_2 + \bar{Z}-f > 0 \qquad (۴-۱۸)$$

مزیت ایجاد قوی ترین محدودیت ترکیبی با استفاده از (۴-۱۸) نسبت به (۴-۱) و (۴-۲) کاملا" واضح است . یک محدودیت ترکیبی از (۴-۸) که سئوال مطرح شده درلوزی ۷ را نمی گذراند این مطلب را به ما می رساند که هیچ تکمیل شدنی S بهتر از بهترین جواب اتکاء که تا بحال پیدا شده است وجود ندارد چنین محدودیتی را قوی ترین محدودیت جانشین می نامیم .

حالا باید به دنبال مجموعه ای از وزن های u_i بگردیم که (۴-۱۸) را تا حد ممکن کوچک کند . قبل از این که به این موضوع بپردازیم باید ببینیم که استفاده یک محدودیتی مانند (۴-۱۶) برای ایجاد یک محدودیت جانشین قوی چگونه باید باشد . فرض کنید یک مسئله برنامه ریزی صفر- یک چهار متغیر ۵ داریم . x_3 و x_4 مقادیر مشخص را توسط S به خود گرفته اند و مسئله بشکل زیر در آمده است .

$$\min : \quad f = 2x_1 + 3x_2 + 10 \qquad (۴-۱۹)$$

$$S.To: \quad g_2 = -x_1 + 6x_2 - 6 \geq 0$$

$$g_2 = 4x_1 - x_2 + 1 \geq 0$$

که عدد ۱۰ در تابع آبژکتیو منتج از منصوب کردن مقادیری به x_3 و x_4 در S می باشد . همچنین فرض کنید که بهترین مقدار شدنی تابع آبژکتیو در این مرحله ۱۳ است ، یعنی $\bar{Z}=۱۳$

محدودیتهای g_1 وg_2 از (۱۹–۴) راباهم ترکیب می کنیم . با واردکردن وزن های u_1 و u_2 وهمچنین با محدودیت جدید کهازتابع آبزکتیو بدست می‌آید شکل زیربیدا خواهدشد:

$$u_1g_1 + u_2g_2 + \bar{Z}-f > 0$$

$$= u_1 (-x_1+6x_2-6)+u_2(4x_1-x_2+1)+ 13 -(2x_1 + 3x_2 + 10) \qquad (۴–۲۰)$$

$$= x_1(-u_1 + 4u_2 -2)+ x_2 (6u_1-u_2-3)-6u_1 +u_2 + 3 \geq 0 \qquad (۴–۲۱)$$

اگربتوانیم یک مجموعه‌ازمقادیربرای u_1 و u_2پیداکنیم بطوری که (۲۰–۴) منفی شود، حتی زمانیکه x_1 و x_2دارای آن مجموعه‌ای ازمقادیر صفر– یک باشند که سعی براین دارندکه (۲۱–۴) راحد اکثرکنند، می توانیم بگوئیم که‌هیچ تکمیل شدنی S وجودنداردکه‌بتوان یک مقدارتابع آبزکتیو کوچکتراز $\bar{Z}$ بدست آورد.

منظورماپیداکردن مجموعه مقادیری برای u_1 و u_2 می باشدکه باترکیب مقادیر صفر– یک برای x_1 و x_2 باعث شودکه (۲۱–۴) کوچکترین مقداررا پیداکنند. در همین موقع مجموعه‌ای ازمقادیرصفر– یک را برای x_1 و x_2 انتخاب می کنیم که درمجاورت با مقادیر u_1 و u_2 (۲۰–۴) حداکثرمقداررا پیداکندبه‌عبارت دیگر .

$$\min_{u_1,u_2}\ \max_{x_1,x_2}\ \underbrace{\left[(-6u_1+u_2+3)\right]}_{\text{جمله اول}} + \underbrace{\left[x_1 (-u_1 + 4u_2-2) + x_2(6u_1-u_2-3)\right]}_{\text{جمله دوم}} \qquad (۴–۲۲)$$

S.To: (1) $x_1,x_2 = 0,1$

(2) تمام متغیرها ≥ 0

(۲۲–۴) به این شکل خوانده می شود: u_1 وu_2 راطوری حساب کنیدکه حداقل کننده‌بوده ودراین ضمن x_1 وx_2 راطوری حساب کنیدکه حداکثرکننده جمله اول بعلاوه جمله دوم باتوجه‌به محدودیت‌های موردنظرباشد.

برای سه خصوصیت موردنظر، (۴-۲۲) یک مسئله استاندارد برنامه ریزی خطی می باشد. یکی از اینها محدودیت اول است. ولی توجه کنیدکه x_1 و x_2 بطور اتوماتیک مقادیرصفر- یک را بخودمی گیرند اگر محدودیت های زیررا جایگزین محدودیت (۱) کنیم :

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1$$
$$0 \leqslant x_2 \leqslant 1 \qquad (۴-۲۳)$$

باعث ایجادمسئله زیرمیشود.

$$\min_{u_1,u_2} \max_{x_1,x_2} \underbrace{\left[(-6u_1+u_2+3)\right]}_{\text{جمله اول}} + \underbrace{\left[x_1(-u_1+4u_2-2)+x_2(6u_1-u_2-3)\right]}_{\text{جمله دوم}} \qquad (۴-۲۴)$$

$$(1) \quad x_1 \leqslant 1 \qquad\qquad x_1 + 0x_2 \leqslant 1$$
$$(2) \quad x_2 \leqslant 1 \qquad\qquad 0x_1 + x_2 \leqslant 1$$

(3) تمام متغیرها $\geqslant 0$

یک الگوریتم اپتیمم کننده که قادربه حل (۴-۲۴) باشد بـــــه x_1 و x_2 مقادیرصفر- یک خواهدداد. اگرالگوریتم درانتخاب مقادیری برای U_1 و U_2 ضریب x_1 درجمله دوم تابع آبژکتیورا منفی سازد x_1 رانیزمساوی صفرخواهــد کردوهمچنین بلعکس $x_1=1$ خواهدشد درمورد x_2 نیزبه همین ترتیب عمل خواهــد کرد. این مسئله ازاین بابت می باشدکه الگوریتم موردنظرباید سعی کندکه با استفاده متغیرهای x_1 و x_2 تابع آبژکتیورا حداکثرکند.

یک خصوصیت دوم که مسئله ما را جدا ازیک مسئله استاندارد برنامه ریـــزی خطی می کند، کوشش همزمان برای حداقل کردن وحداکثرکردن برروی متغیرهای متفاوت دریک تابع آبژکتیو می باشد. خصوصیت سوم درجه دوم بودن جمـــلات درتابع آبژکتیو می باشد برای مثال حاصل ضرب x و U . برای رفع ایـــــــن اشکالات فرض می کنیم که U_1 و U_2 مقادیرثابت هستندپس (۴-۲۴) رابه شکــــل زیرتغییرمی دهیم .

$$\max : \quad x_1 \left(-u_1 + 4u_2 - 2 \right) + x_2 \left(6u_1 - u_2 - 3 \right) \qquad (۴-۲۵)$$

$$\begin{aligned} \text{S.To} \quad & x_1 \leqslant 1 \\ & x_2 \leqslant 1 \\ & \text{تمام متغیرها} \geqslant 0 \end{aligned}$$

سیستم ثانویه*(۴-۲۵) به شکل زیرخواهدشد .

$$\min : \quad 1y_1 + 1y_2 \qquad (۴-۲۶)$$

$$\begin{aligned} \text{S.To:} \quad & y_1 + 0y_2 \geqslant (-u_1 + 4u_2 - 2) \\ & 0y_1 + y_2 \geqslant (6u_1 - u_2 - 3) \\ & \text{تمام متغیرها} \geqslant 0 \end{aligned}$$

حال می توانیم (۴-۲۶) را با جمله یک مسئله (۴-۲۴) ترکیب کنیم (یک مسئله حداقل کننده) چون هردودارای متغیرها ومحدودیتهای مشترک هستند :

$$\min : \quad y_1 + y_2 - 6u_1 + u_2 \qquad (۴-۲۷)$$

$$\begin{aligned} \text{S.To} \quad & y_1 + u_1 - 4u_2 \geqslant -2 \\ & y_2 - 6u_1 + u_2 \geqslant -3 \\ & \text{تمام متغیرها} \geqslant 0 \end{aligned}$$

حل (۴-۲۷) ازطریق الگوریتم سیمپلکس*جواب زیربدست خواهدآمد .

$$u_2 = y_1 = y_2 = 0$$

$$u_2 = 0.5$$

پس قوی ترین محدودیت از (۴-۲۱) به شکل زیراست .

$$x_1 (-0.5 + 0 - 2) + x_2 (3 - 0 - 3) \quad -3 - 0 + 3 \geqslant 0 \qquad (۴-۲۸)$$

یا

$$-2.5 \; x_1 \geqslant 0$$

---

* برای ایجادسیستم های ثانویه دربرنامه ریزی خطی وهمچنین الگوریتم سیمپلکس به متون برنامه ریزی خطی مراجعه شود .

ازآنجائیکه (۴-۲۸) نمی تواندبرقرارباشدجواب جزئی موردنظربررسی گردیده است . بدین منظورکه‌هیچ تکمیل دیگرآن جاذبه‌ای نخواهدداشت .باید توجه داشت‌که‌تابع آبژکتیودر (۴-۲۷) موقع ارزیابی درجواب اپتیمم منفی است زیرا :

$$0+0-6(0.5)-0= -3$$

اماتابع آبژکتیوبرای (۴-۲۰) فرموله شده‌بود، ونمی تواندمنفی باشد. درایجادقوی ترین محدودیت ازطریق الگوریتم سیمپلکس ، می دانیم که خصوصیات جواب جزئی ماکاملا" بررسی می شود (یعنی هیچ تکمیل دیگرآن جاذبه‌ای ندارد) ، به‌همان سرعتی که هرجواب‌شدنی ایجادمی گرددودارای یک مقدارتابع آبژکتیوغیرمثبت است . هرجواب شدنی بهترحتی باعث ایجادیک مقدارتابع آبژکتیوبزرگترهم میشود .

اگرسیستم ثانویه مسئله برنامه‌ریزی خطی (۴-۲۷) رابنویسیم :

$$\begin{aligned} \max \quad & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{S.To} \quad & -x_1 \geqslant -1 \\ & -x_2 \geqslant -1 \\ & -x_1 + 6x_2 \geqslant 6 \\ & 4x_1 - x_2 \geqslant 1 \end{aligned} \qquad (۴-۲۹)$$

یا :

$$\begin{aligned} \min: \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sTo:} \quad & x_1 \leqslant 1 \\ & x_2 \leqslant 1 \\ & -x_1 - 6x_2 - 6 \geqslant 0 \\ & 4x_1 - x_2 - 1 \geqslant 0 \end{aligned}$$

درست همان مسئله‌ای است‌که‌در (۴-۱۹) عنوان شده ولی بااین تفاوت که سایک مسئله معمولی برنامه‌ریزی خطی سروکارداریم تایک مسئله‌بااعدادصحیح .

این خاصیت کلی خیلی مفید است . فرض کنید که یک مسئله برنامه ریزی خطی را حل کرده ایم تا قوی ترین محدودیت جانشین ممکن را پیدا کنیم وقادر نبودیم خصوصیات جواب جزئی مربوطه را توسط نشدنی بودن آن بررسی کنیم . اگر درست همین موضوع اتفاق بیافتد که متغیرهای سیستم ثانویه [درارتباط با xها در (۲۹–۴)] درجواب اپتیمال این مسئله برنامه ریزی خطی با اعداد صحیح (یا صفر و یا یک) باشند یک جواب برای مسئله برنامه ریزی خطی پیوسته که شدنی -و بنابراین اپتیمال - است را برای مسئله با اعداد صحیح پیدا کرده ایم . با تغییر کامل این متغیرهای ثانویه با مقدار صحیح ، می توانیم مستقیما "به تکمیل اپتیمال جواب جزئی موردبحث برویم و بازگشت به عقب کنیم . بدین ترتیب احتیاج به آزمایش سایر تکمیل های این جواب جزئی نداریم چون بهترین تکمیل متغیرهای ثانویه با مقدار صحیح را داریم .

جنبه دیگر محدودیتهای جانشین سبب افزایش موارد استفاده آنها میشود . فرض کنید که درجواب یک مسئله برنامه ریزی خطی برای پیدا کردن قوی ترین محدودیت جانشین که از دو شکل فوق نباشد (شناخت یک جواب جزئی از طریق نشدنی بودن آن ، متغیرهای ثانویه با اعداد صحیح) مقادیری برای U ها پیدا شده که می توانیم با آنها محدودیت جانشین را بسازیم . اما چگونه می توان از این محدودیت استفاده نمود ؟ مانند هرمحدودیت دیگری می توان این محدودیت را نیز بکار برد . یک آزمون که خیلی سودمند است را می توان درمورد محدودیتهای جانشین بکار گرفت (همچنین درمورد هرمحدودیت دیگر) که به شکل زیر است :

$$-6+ x_1 + 7x_2 \geqslant 0$$

می دانیم که x_2 درمحدویت فوق باید مقدار یک را بخود بگیرد . به هرحال الگوریتم شمارش ضمنی به ما اجازه نمی دهد که یک متغیر را به جواب جزئی وارد کنیم مگر اینکه بخواهیم برای این متغیرها بازگشت به عقب (تکمیل) کنیم برای این محدودیت بخصوص هیچ علاقه ای به تکمیل x_2 نداریم ، چون میدانیم که در هرجواب جزئی تحت ملاحظه مقدار آن باید یک باشد . با تغییرات کمی در الگوریتم

می توانیم این آزمون را وارد کنیم . اگر الگوریتم شمارش ضمنی را به این ترتیب تغییر دهیم که در زیر هر عضو x_2 که آن را تکمیل می کنیم خطی بکشیم و در زمان بازگشت به عقب عضوهائی را که زیر آنها خط کشیده شده است را ملاحظه کنیم تا آنهائی که علامت منفی دارند. بدین ترتیب هنوز میتوانیم قسمت های مناسب از شبکه جواب را استخراج کنیم .

۵ـ حل کامپیوتری برنامه‌ریزی صفر ـ یک

یک برنامه‌کامپیوتری به زبان FORTAN IV برای حل برنامه‌ریزی صفر ـ یک درزیرارائه شده‌است . جواب این برنامه‌مشابه تصویر۷ می باشد .اطلاعات لازم برای استفاده‌ازاین برنامه‌دریادداشت‌های اول برنامه‌کاملا" توضیح داده شده‌است .

```
C      ******************************************************************
C      *                                                                *
C      *    THIS PROGRAM CALCULATES THE OPTIMAL SOLUTION TO A ZERO-ONE  *
C      *    PROBLEM, USING IMPLICIT ENUMERATION.                        *
C      *                                                                *
C      *    THE OBJECTIVE FUNCTION IS TO BE MINIMIZED.                  *
C      *    ALL OBJECTIVE FUNCTION COEFFICIENTS MUST BE NON- NEGATIVE.  *
C      *    ALL CONSTRAINTS MUST BE OF THE FORM G(I) GREATER THAN OR    *
C      *    EQUAL TO ZERO.                                              *
C      *                                                                *
C      *    THE PROGRAM WILL HANDLE UP TO 50 VARIABLES BUT WILL ONLY    *
C      *    PRINT RESULTS FOR 11 VARIABLES. A 136 CHARACTER PRINTER     *
C      *    IS NECESSARY FOR THIS OUTPUT.                               *
C      *    INPUT = TAPE5          OUTPUTF= TAPE6                       *
C      *                                                                *
C      *                   ***     DATA/CARDS     ***                   *
C      *                                                                *
C      *    FIRST CARD                                                  *
C      *      COL. 1-4      NUMBER OF CONSTRAINTS (RIGHT JUSTIFIED)     *
C      *      COL. 5-8      NUMBER OF VARIABLES    (RIGHT JUSTIFIED)    *
C      *      COL. 9-12     INTERVAL AT WHICH STEPS ARE TO BE PRINTED   *
C      *                                                                *
C      *    SECOND CARD                                                 *
C      *      OBJECTIVE FUNCTION    20 FOUR-COLUMN NUMBERS PER CARD     *
C      *      ADDITIONAL VARIABLES MAY BE ADDED TO SECOND OR THIRD      *
C      *      CARD UP TO A MAXIMUM OF FIFTY VARIABLES.                  *
C      *                                                                *
C      *    THIRD CARD THROUGH THE NUMBER OF CONSTRAINTS.               *
C      *    CONSTRAINT FUNCTION, G(I)  20 FOUR-COLUMN NUMBERS PER CARD  *
C      *     COL. 1-4     CONSTRAINT IF NEGATIVE (RIGHT JUS)            *
```

```
C     *     REMAINING FOUR COLUMN SETS ARE THE COEFFICIENTS OF THE      *00000310
C     *     CONSTRAINTS. MORE CARDS MAY BE ADDED TO EACH CONSTRAINT     *00000320
C     *     AS NESSARRY.  (RIGHT JUSTIFIED)                             *00000330
C     *                                                                 *00000340
C     *    LAST CARD OF SET                                             *00000350
C     *     COL. 1-4  BEST KNOWN VALUE OF ZBAR (RIGHT JUS)              *00000360
C     *                                                                 *00000370
C     *    ADDITIONAL DATA SET MAY BE STACKED ONE BEHIND ANOTHER        *00000380
C     *    THE FINAL CARD OF THE ENTIRE DATA DECK SHOULD HAVE 9999      *00000390
C     *    PUNCHED IN COL. 1-4                                          *00000400
C     *                                                                 *00000410
C     *    NOTE --- DATA MAY BE PUNCHED WITH OR WITHOUT DECIMAL AS      *00000420
C     *             DESIRED, BUT IN ALL CASES MUST BE RIGHT JUSTIFIED   *00000430
C     *                                                                 *00000440
C     *    NOTE --- SET EPS TO SOME SMALL DECIMAL FRACTION TO ALLOW     *00000450
C     *             FOR ROUND-OFF ERROR.                                *00000460
C     *                                                                 *00000470
C     *             THE APPROPRIATE VALUE  OF EPS MAY DEPEND UPON THE   *00000480
C     *             PROBLEM BEING SOLVED AND THE COMPUTER BEING USED    *00000490
C     *             A POSITIVE NUMBER LESS THAN +EPS WILL BE            *00000500
C     *             INTERPRETED AS BEING EQUAL TO ZERO                  *00000510
C     *             ANEGATIVE NUMBER GRATER THAN -EPS WILL ALSO BE      *00000520
C     *             INTERPRETED AS BEING EQUAL TO ZERO                  *00000530
C     *                                                                 *00000540
C     *             IF NO PROBLEMS WITH ROUND-OFF SET EPS TO ZERO       *00000550
C     *******************************************************************00000560
C                                                                        00000570
      DIMENSION A(50,50), C(50), B(50), CS(50), W(50,50), IX(50), IS(50)00000580
      DIMENSION IV(50), IT(50), NOTT(50), SUMS(50)                       00000590
      DIMENSION IPRINT(50), ISAVE(50,50), ISTEP(50), INUM(50)            00000600
```

```
C
      EPS =0.000001
C
      DO 11 I=1,50
   11 INUM(I) = I
    1 CONTINUE
      ITPCK = 0
      IFEAS = 0
      ICOUNT = 0
      READ(5,500)M,N,INT
  500 FORMAT (20I4)
      IF  (M-51)4,9000,9000
    4 DO 2 II =1,50
      B(II) = 0.0
      C(II) = 0.0
      IS(II) =0
      IV(II) =0
      IT(II) =0
      IX(II) =9
      NOTT(II) = 0
      SUMS(II) = 0.0
      DO 2 JJ =1,50
      A(II,JJ) =0.0
      W(II,JJ) =0.0
    2 CONTINUE
      DO 3 I = 1,34
      IPRINT(I) = 0
    3 CONTINUE
      READ (5,510)(C(J),J=1,N)
  510 FORMAT  (20F4.0)
```

```
      DO 10 I=1,M
   10 READ (5,510) B(I), (A(I,J), J=1,N)
      READ (5,510) ZBAR
      FZBAR = ZBAR
      DO 20 J=1,N
      CS(J)= D.
      DO 20 I=1,M
   20 CS(J) = CS(J) + A(I,J)
C
C     *****************************************************************
C     *
C     *        THIS SECTION PRINTS OUT MATRIX INPUT
C     *
C     *****************************************************************
C
      WRITE(6,12)
   12 FORMAT (1H1,19X,18HOBJECTIVE FUNCTION,/)
      WRITE (6,76)(INUM(J),J=1,N)
   76 FORMAT (12X,10(9X,1HX,I2))
      WRITE (6,77)(C(K),K=1,N)
   77 FORMAT (1H0,12X,10F12.1,/,(13X,10F12.1))
      WRITE (6,81)
   81 FORMAT (1H0,/,20X,11HCONSTRAINTS,//,6X,8HCONSTANT,/)
      DO 84 I=1,M
      WRITE (6,83) I,B(I), (A(I,J),J=1,N)
   83 FORMAT (1H0,1X,1HG,I2,2X,F6.1,10F12.1,/,(13X,10F12.1))
   84 CONTINUE
      DO 17 I =1,M
      IF(B(I))19,17,17
   17 CONTINUE
```

```
      DO 18 I=1,50
      IX(I)=0
   18 CONTINUE
      ZBAR =0.0
      WRITE (6,86)
   86 FORMAT(1H0,//,16X,26HALL CONSTANTS ARE POSITIVE,/)
      GO TO 1750
   19 WRITE(6,5)
    5 FORMAT (1H1,/,6H STEP*,34X,1H*,34X,9H*OBJ FCN*,34X,11H* NOT* ADD*,
     2/,6H NUMB*,6X,22HPARTIAL SOLUTION    (S),6X,1H*,4X,26HVIOLATED CONS
     3TRAINTS    (V),4X,9H*COF LIM*,7X,20HVARIABLES IN SET (T),
     4 7X,17H* SAT*TO S*  ZBAR,/,135(1H*))
      NUMB=0
      NS=0
C
C     *******************************************************************
C     *                                                                 *
C     *                          STEP 2                                 *
C     *                                                                 *
C     *     FIND V, THE SET OF CONSTRAINTS VIOLATED WHEN PARTIAL        *
C     *     SOLUTION S IS COMPLETED BY SETTING TO ZERO ALL VARIABLES    *
C     *     NOT IN THE SET S                                            *
C     *                                                                 *
C     *     FIND FP, THE VALUE OF F WHEN S IS COMPLETED BY SETTING      *
C     *     TO ZERO ALL VARIABLES NOT IN S.                             *
C     *                                                                 *
C     *******************************************************************
C
   45 IF (NUMB)645,645,639
  639 IP = 11
```

```
      IF (NS-11)640,640,642
  640 IP = NS
  642 DO 1001 I=1,IP
      IPRINT(I) =IS(I)
 1001 CONTINUE
  645 FP=0.
      NW=0
      IF (NS)51,51,52
   52 DO 50 J=1,NS
      IF (IS(J))50,50,55
   55 NW=NW+1
      JJ=IS(J)
      DO 60 I=1,M
   60 W(I,NW) =A(I,JJ)
      FP=FP +C(JJ)
   50 CONTINUE
   51 NW=NW+1
      DO 65 I=1,M
   65 W(I,NW)=B(I)
      MV=0
      DO 70 I=1,M
      SUMS(I) =0.
      DO 80 J=1,NW
   80 SUMS(I) =SUMS(I)+W(I,J)
      IF (SUMS(I)+EPS) 85,70,70
   85 MV=MV+1
      IV(MV)=I
   70 CONTINUE
C
C
```

```
C                                                                       00001810
C     ******************************************************************00001820
C     *                                                                *00001830
C     *                            STEP 3                              *00001840
C     *                                                                *00001850
C     *                     IS THE SET V EMPTY                         *00001860
C     *                                                                *00001870
C     *      IF YES - - GO TO STEP 9                                   *00001880
C     *      IF NO - -  GO TO STEP 4                                   *00001890
C     *                                                                *00001900
C     ******************************************************************00001910
C                                                                       00001920
      IF(MV)200,200,90                                                  00001930
   90 IP =11                                                            00001940
      IF (MV-11)92,92,94                                                00001950
   92 IP = MV                                                           00001960
   94 DO 1200  I=1,IP                                                   00001970
      IPRINT (I+11) = IV(I)                                             00001980
 1200 CONTINUE                                                          00001990
C                                                                       00002000
C     ******************************************************************00002010
C     *                                                                *00002020
C     *                            STEP 4                              *00002030
C     *                                                                *00002040
C     *       SET THE OBJECTIVE FUNCTION COEFFICIENT LIMIT TO          *00002050
C     *       ZBAR - FP                                                *00002060
C     *                                                                *00002070
C     ******************************************************************00002080
C                                                                       00002090
      CLIM = ZBAR -FP                                                   00002100
```

```
      NW =0
      NT =0
      IT(1)=0
C
C     ****************************************************************
C     *
C     *                       STEP 5
C     *
C     *    STORE IN THE SET T EACH VARIABLE NOT IN THE SET S WHICH
C     *    HAS.
C     *       1. AN OBJECTIVE FUNCTION COEFFICIENT LESS THAN THE LIMIT
C     *       2. A POSITIVE COEFFICIENT IN SOME CONSTRAINT IN V
C     *
C     ****************************************************************
C
      DO 100 J=1,N
  100 NOTT(J) =0
      IF (NS)104,104,101
  101 DO 105 J=1,NS
      ITEMP = IS(J)
      IF(ITEMP) 102,105,105
  102 ITEMP = -ITEMP
  105 NOTT(ITEMP)=1
  104 DO 110 J=1,N
      IF(NOTT(J)) 115,115,110
  115 IF (CLIM - C(J)) 110,110,120
  120 DO 125  I=1,MV
      ITEMP = IV(I)
      IF (A(ITEMP,J)) 125,125,130
  125 CONTINUE
```

```
      GO TO 110
  130 NT =NT+1
      IT(NT)=J
      NW = NW +1
      DO 135  I =1,M
  135 W(I,NW) = A(I,J)
  110 CONTINUE
      IP = 11
      IF (NT-11)106,106,108
  106 IP = NT
  108 DO 1300 I=1,IP
      IPRINT(I+22) = IT(I)
 1300 CONTINUE
C
C     ******************************************************************
C     *
C     *                          STEP 6
C     *
C     *                    IS THE SET T EMPTY
C     *
C     *     IF YES - - SET ITPCK TO 1 AND GO TO OUTPUT SECTION, THEN
C     *                GO TO STEP 11 (BACKTRACK)
C     *     IF NO - - GO TO STEP 7
C     *
C     ******************************************************************
C
      IF(NT)1400,1400,138
 1400 ITPCK =1
      JMAX =0
      GO TO 1000
```

```
C
C     ******************************************************************
C     *
C     *                        STEP 7
C     *
C     *     CAN EVERY CONSTRAINT IN V BE MADE FEASIBLE BY ADDING
C     *     ONLY VARIABLES IN T
C     *
C     *     IF NO - - SET ITPCK TO 1 AND GO TO OUTPUT SECTION, THEN
C     *                 GO TO STEP 11(BACKTRACK)
C     *   . IF YES - -  GO TO STEP 8
C     *
C     ******************************************************************
C
  138 DO 140  I= 1, MV
      ITEMP = IV(I)
      DO 145 J =1,NW
      IF(W(ITEMP,J))145,145,150
  150 SUMS(ITEMP)=SUMS(ITEMP)+ W(ITEMP,J)
  145 CONTINUE
      IF (SUMS(ITEMP) +EPS)152,140,140
  152 IPRINT(34) = ITEMP
      ITPCK = 1
      JMAX =0
      GO TO 1000
  140 CONTINUE
C
C     ******************************************************************
C     *
C     *                       STEP 8
```

```
C      *
C      *    ADD TO S THE VARIABLE IN T WITH THE GREATEST COEFF. SUM,
C      *    GO TO OUTPUT SECTION, THEN GO TO STEP 2
C      *
C      *****************************************************************
C
      JMAX = IT(1)
      CSMAX =CS(JMAX)
      IF (NT -2) 156, 146,146
  146 DO 155 J=2,NT
      JTEMP=IT(J)
      IF(CS(JTEMP)-CSMAX) 155,160,170
  160 IF(C(JTEMP) -C(JMAX)) 170,155,155
  170 JMAX =JTEMP
      CSMAX=CS(JTEMP)
  155 CONTINUE
  156 CONTINUE
      GO TO 1000
  157 CONTINUE
      NS = NS +1
      IS(NS) =JMAX
      NUMB =NUMB +1
      GO TO 45
C
C      *****************************************************************
C      *
C      *                         STEP 9
C      *
C      *    COMPLETE THE PARTIAL SOLUTION S BY SETTING TO ZERO ALL
C      *    VARIABLES NOT IN S. THIS COMPLETED SOLUTION BECOMES THE
```

```
C     *    INCUMBENT SOLUTION X-BAR,  AND THE VALUE OF THE OBJECTIVE    *
C     *    FUNCTION AT X=BAR BECOMES THE NEW VALUE OF ZBAR              *
C     *******************************************************************
C
  200 DO 210  J=1,N
  210 IX(J) =0
      ZBAR =0
      DO 215 J=1,NS
      JTEMP = IS(J)
      IF(JTEMP) 215,215,217
  217 IX(JTEMP) =1
      ZBAR = ZBAR +C(JTEMP)
  215 CONTINUE
C
C     *******************************************************************
C     *                                                                 *
C     *    FEASIBLE SOLUTION ENCOUNTRED - SET IFEAS TO 1 TO SAVE        *
C     *                                                                 *
C     *******************************************************************
C
      IFEAS = 1
      JMAX =0
      CLIM =0
C
C     *******************************************************************
C     *                                                                 *
C     *    THIS SECTION IS THE OUTPUT SECTION - STEPS ARE PRINTED       *
C     *    ACCORDING TO INTERVAL PUNCHED ON FIRST DATA CARD             *
C     *                                                                 *
C     *******************************************************************
```

```
C
 1000 ICK = (NUMB/INT)*INT -NUMB
      IF (ICK)1550,1010,1550
 1010 WRITE(6,1500)NUMB,(IPRINT(I),I=1,11),(IPRINT(J),J=12,22),CLIM,
     2(IPRINT(K),K=23,33),IPRINT(34),JMAX,ZBAR
 1500 FORMAT(1X,I3,2H *,2(11I3,2H *),F6.1,   2H *,11I3,2H *,
     22(I3,2H *),F6.1,   /,5X,1H*,2(34X,1H*),7X,1H*,34X,1H*,2(4X,1H*))
 1550 DO 1600 I=1,34
      IPRINT(I)=0
 1600 CONTINUE
      IF (IFEAS-1) 1605,300,300
 1605 IF (ITPCK-1) 157,300,300
C
C     ****************************************************************
C     *                                                              *
C     *                          STEP 11                             *
C     *                                                              *
C     *            ARE ALL ELEMENTS IN THE SET S NEGATIVE            *
C     *                                                              *
C     *     IF NOT - -  LOCATE THE RIGHTMOST POSITIVE ELEMENT IN S.  *
C     *     REPLACE IT WITH ITS COMPLEMENT (NEGATIVE) AND DROP ANY   *
C     *     ELEMENTS TO THE RIGHT. THEN GO TO STEP 2.                *
C     *                                                              *
C     *     IF SO - - TERMINATE .                                    *
C     *                                                              *
C     ****************************************************************
C
  300 NEWS = NS
      DO 220  J=1,NS
      JJ =NS -J+1
```

```
      IF (IS(JJ)) 225,225,230
  225 NEWS = NEWS-1
  220 CONTINUE
      GO TO 400
  230 IS(JJ) = -IS(JJ)
      NS = NEWS
      IF (IFEAS-1) 1512,1508,1508
 1508 IF (ITPCK-1) 1511,1512,1512
 1511 IF (50-ICOUNT)1512,1512,1509
 1509 ICOUNT = ICOUNT +1
      ISTEP(ICOUNT) = NUMB
      DO 1510 I =1,N
      ISAVE(ICOUNT,I) =IX(I)
 1510 CONTINUE
 1512 IFEAS = 0
      ITPCK =0
      NUMB = NUMB +1
      GO TO 45
C
C     *******************************************************************
C     *                         STEP 12                                 *
C     *                                                                 *
C     *      TERMINATE - - THE INCUMBENT SOLUTION, IF ANY, IS OPTIMAL   *
C     *      IF NONE - - THEN THERE IS NO FEASIBLE SOLUTION BETTER THAN *
C     *                 THE INITIAL VALUE OF ZBAR                       *
C     *                                                                 *
C     *******************************************************************
C
  400 WRITE(6,1610)
 1610 FORMAT(1HO)
```

```
      IF(IX(I)-9)1630,1615,1615
 1615 WRITE(6,1620)FZBAR
 1620 FORMAT(1H ,4X,80HTHERE IS NO FEASIBLE SOLUTION WITH A VALUE FOR TH
     2E OBJECTIVE FUNCTION LOWER THAN,F7.1,24H, THE INITIAL ZBAR VALUE)
      GO TO 1
 1630 DO 1700 I =1,ICOUNT
      WRITE(6,1650)ISTEP(I),(ISAVE(I,J),J=1,N)
 1650 FORMAT (1H0,4X,23HFEASIBLE SOLUTION, STEP,I4,2X,50I2)
 1700 CONTINUE
 1750 WRITE(6,1800)(IX(I),I=1,N)
 1800 FORMAT (1H0,/, 16X,16HOPTIMAL SOLUTION,2X,50I2)
      WRITE (6,1900) ZBAR
 1900 FORMAT(1H0,28X,38HOPTIMAL VALUE OF OBJECTIVE FUNCTION = , F10.4)
      GO TO 1
 9000 CALL EXIT
      END
```

حل مسئله ۱۱-۳ با استفاده از برنامه فوق به عنوان نمونه حل شده است

تصویر ۸ اطلاعات ورودی را نشان می دهد. جواب خروجی در تصویر ۹ آمده است.

```
   7   10    1
  10    7    1   12    2    8    3    1    5    3
  -2   -3   12    8   -1    0    0    0    0    7   -2
  -1    0   -1   10    0    5   -1   -7   -1    0    0
  -1   -5    3    1    0    0    0    0    2    0   -1
   1    5   -3   -1    0    0    0    0   -2    0    1
  -3    0    0    4    2    0    5   -1    9    2    0
  -7    0   -9    0   12    7   -6    0   -2   15   -3
  -1    8   -5   -2    7    1    0    5    0   10    0
  52
9999
```

تصویر ۸

OBJECTIVE FUNCTION

	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7	X 8	X 9	X10
	10.0	7.0	1.0	12.0	2.0	8.0	3.0	1.0	5.0	3.0

CONSTRAINTS

	CONSTANT										
G 1	-2.0	-3.0	12.0	8.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	7.0	-2.0
G 2	-1.0	0.0	-1.0	10.0	0.0	5.0	-1.0	-7.0	-1.0	0.0	0.0
G 3	-1.0	-5.0	3.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.0	0.0	-1.0
G 4	1.0	5.0	-3.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-2.0	0.0	1.0
G 5	-3.0	0.0	0.0	4.0	2.0	0.0	5.0	-1.0	9.0	2.0	0.0
G 6	-7.0	0.0	-9.0	0.0	12.0	7.0	-6.0	0.0	-2.0	15.0	-3.0
G 7	-1.0	8.0	-5.0	-2.0	7.0	1.0	0.0	5.0	0.0	10.0	0.0

تصویر ۹

STEP NUMBR	PARTIAL SOLUTION (S)											VIOLATED CONSTRAINTS (V)											OBJ FCN COF LIN	VARIABLES IN SET (T)											NOT SAT	ADD TO S	ZBAR
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	5	6	7	0	0	0	0	0	52.0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	0	0	9	52.0
1	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	5	0	0	0	0	0	0	0	0	47.0	2	3	4	5	6	8	0	0	0	0	0	0	3	52.0
2	4	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.0
3	9	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	5	0	0	0	0	0	0	0	0	1.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.0
4	-9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	5	6	7	0	0	0	0	0	6.0	3	5	7	8	0	0	0	0	0	0	0	0	3	6.0
5	-9	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.0	5	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	6.0
6	-9	3	5	0	0	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.0
7	-9	3	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	6	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	6.0
8	-9	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	5	6	7	0	0	0	0	0	6.0	5	7	8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	6.0

FEASIBLE SOLUTION, STEP 2 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0

OPTIMAL SOLUTION 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0

OPTIMAL VALUE OF OBJECTIVE FUNCTION = 6.0000

تصویر ۹ (دنباله)

بخش دوم

کاربرد الگوهای برنامه ریزی صفر- یک

۱- مقدمـــــه

با این که کاربرد برنامه ریزی صفر- یک بسیار زیاد می باشد ولی دراین بخش سعی شده است که مثالهائی به عنوان نمونه برای چگونگی کاربرد اینگونه مدلها آورده شود. یکی از کاربردهای این مدل حل مدلهای برنامه ریزی خطی وغیرخطی با اعداد صحیح می باشد.

۱-۲- حل مسائل برنامه ریزی خطی با اعداد صحیح

فرض کنید که مسئله زیر داده شده است:

$$\max: \quad f=2x \qquad (۲-۱)$$

$$\text{S.To:} \quad (1) \quad x \leqslant 6$$

$$(2) \quad x = 0,1,2,3,...$$

واضح است که x باید یک عدد صحیح بین صفر و شش باشد. حال بجای x یک تابعی از متغیرهای y_0 و y_1 و y_2 و ... را می گذاریم که هر متغیر جدید فقط می تواند مقدار صفر و یا یک را بخود بگیرد، پس:

$$X= f(y_0, y_1, y_2,...) = \sum_{j=0}^{k} 2^j y_j \qquad (۲-۲)$$

K کوچکترین عدد صحیحی است که:

$$2^{k+1} -1 \geqslant U \qquad (۲-۳)$$

و U حد بالا برای x است. در مثال ما با توجه به محدودیت (۱) از (۲-۱) این مقدار برابر ۶ می باشد.

اگر $k=1$ باشد:

$$2^{k+1}-1= 2^{1+1}-1 = 3$$

و اگر $k=2$ باشد:

$$2^{k+1}-1 = 2^{2+1}-1 =7$$

پس ۲ کوچکترین عددصحیح برای k می باشد پس (۲-۲) به شکل زیـــــردر می آیـــد .

$$X=\sum_{j=0}^{2} 2^j y_j = 2^0 y_0 + 2^1 y_1 + 2^2 y_2 \qquad (۲-۴)$$

$$= y_0 + 2y_1 + 4y_2$$

حال در (۱-۲) بجای x مقدار (۴-۲) یا (y_2 و y_1 و y_0)f را می گذاریم :

$$\max: \ f_1 = 2(y_0 + 2y_1 + 4y_2) = 2y_0 + 4y_1 + 8y_2 \qquad (۲-۵)$$

S.To: (1) $y_0 + 2y_1 + 4y_2 \leqslant 6$

(2) $y_i = 0,1 \quad i = 0,1,2$

درحل (۵-۱) برای مقادیر y_0 و y_1 و y_2 ، ضرائب توان ۲ حل می‌شودکـه بصورت دودوئی (binary)کوشده اندومعادل x هستند :

$y = y_0 + 2y_1 + 4y_2$	y_0	y_1	y_2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	0	1	0
3	1	1	0
4	0	0	1
5	1	0	1
6	0	1	1

براحتی یک الگوریتم برنامه ریزی صفر- یک رابرای (۵-۲) بکارمی بریـم وجواب اپتیمم رابرای مقادیر y_2 و y_1 و y_0 محاسبه می نمائیم که x=6 جواب اپتیمال برای (۱-۲) رابدست می دهد .

مسئله دیگری رادرنظربگیرید :

$$\begin{aligned}
\max: \quad & f = x_1 + 3x_2 \\
S.To: \quad & (1)\ x_1 \leqslant 4 \\
& (2)\ x_2 \leqslant 5 \\
& (3)\ 2x_1 + 4x_2 \leqslant 18 \\
& (4)\ x_1,\ x_2 = 0,1,2,\ldots
\end{aligned} \tag{۲-۶}$$

x_1 را درنظربگیریدکوچکترمقدارصحیح k برابرخواهدبودبا k=۲ چون

$2^{k+1} - 1 \geqslant 4$

بااستفاده از (۲-۲) می‌توانیم بنویسیم :

$$x_1 = \sum_{j=0}^{2} 2^j y_{1j} = y_{10} + y_{11} + 4y_{12}$$

برای x_2 نیزبهمین ترتیب‌عمل می کنیم . کوچکترین مقدارصحیح k برابر با ۲ خواهدبود.

$2^{k+1} - 1 \geqslant 5$

پـــس:

$$x_2 = y_{20} + 2y_{21} + 4y_{22}$$

مسئله (۶-۲) به شکل زیرخواهدشــد :

$$\begin{aligned}
\max: \quad & f_1 = y_{10} + 2y_{11} + 4y_{12} + 3y_{20} + 6y_{21} + 12y_{22} \\
S.To: \quad & (1)\quad y_{10} + 2y_{11} + 4y_{12} \leqslant 4 \\
& (2)\quad y_{20} + 2y_{21} + 4y_{22} \leqslant 5 \\
& (3)\quad 2y_{10} + 4y_{11} + 8y_{12} + 4y_{20} + 8y_{21} + 16y_{22} \leqslant 18 \\
& (4)\quad y_{10},\ y_{11},\ y_{12},\ y_{20},\ y_{21},\ y_{22} = 0,1
\end{aligned}$$

واضح است‌اگرهرمتغیردرمسئله اصلی حدبالای بسیاربزرگ داشته‌باشدابعاد مسئله‌ای که بااستفاده ازآن ساخته‌خواهدشدخیلی بزرگ می‌شود.

۲-۲- حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی با اعداد صحیح

اگر x مساوی صفر یا یک باشد، بطور وضوح x^n نیز برابر صفر یا یک خواهد بود

چون :

$$(0)^n = 0$$

$$(1)^n = 1$$

از این واقعیت برای ساده‌کردن مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی که در آن متغیرها محدود به گرفتن مقادیر صفر و یک باشند می‌توان استفاده نمود. برای مثال مسئله زیر را درنظر بگیرید :

$$\max: \quad f = 2x_1^2 + x_1x_2 - 3x_1 \qquad (۲-۷)$$

$$S.To: \quad x_1, \ x_2 = 0, 1$$

محدودیتی که در (۲-۷) بکار برده شده است تابع آبزکتیو را می‌تواند به شکل زیر تغییر دهد :

$$f = 2x_1^2 + x_1x_2 - 3x_1 \equiv 2x_1 + x_1x_2 - 3x_1$$

حال در تابع آبزکتیو فوق تنها عنصر غیرخطی x_1x_2 می باشد. به‌جای x_1x_2 متغیر x_3 را می گذاریم و به (۲-۷) ۳ محدودیت زیر را نیز اضافه می کنیم .

$$(1) \quad x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 1 \qquad (۲-۸)$$

$$(2) \quad -x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 0$$

$$(3) \quad x_3 = 0, 1$$

برای ارزیابی این که محدودیتهای (۲-۸) باعث آن می شود که x_3 همان مقداری را بخود بگیرد که x_1x_2، مقادیری برای x_1 و x_2 درنظر می گیریم .

۱- زمانیکه $x_1 = x_2 = 0$ ، محدودیت (۱)، x_3 را محدود نمی کند اما محدودیت (۲) باعث می شود که $x_3 = 0$ گردد و این همانطور است که باید باشد چون $x_3 = x_1x_2$.

۲- اگر $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$ محدودیت (۲)، x_3 را محدود نمی کند اما محدودیت (۱)

باعث می شودکه $x_3=0$ شودواین‌همانطوراست که‌بایدباشدچون
$x_3=x_1\ x_2$.

۳ـ اگر $x_1=1$ و $x_2=0$ باشدشرایط ۲ صادق خواهدبود

۴ـ اگر $x_1=x_2=1$ محدودیت (۱) به‌شکل زیرخواهدبود .

(۲ـ۹)

$$1+1-x_3 \leqslant 1 \qquad \text{یا} \qquad x_3 \geqslant 1$$

ومحدودیت (۲) :

(۲ـ۱۰)

$$-1-1+2x_3 \leqslant 0 \qquad \text{یا} \qquad x_3 \leqslant 1$$

اجتماع (۹ـ۲) و (۱۰ـ۲) تضمین می کندکه $x_3=1$ است واین همانطوراست که بایدباشدچون $x_3=x_2\ x_1$.

بطورکلی درمسائل برنامه‌ریزی غیرخطی صفرـ یک ، جملاتی که‌بشکل $x_1^{n_1}.x_2^{n_2}.x_3^{n_3}\ldots$ باشندرا می توانیم باحذف‌توان آنها به‌شکل $x_1.x_2.x_3\ldots$ بنویسیم . حتی اگرجملات درمحدودیت ها باشند .بدین ترتیب تنها مشکل تبدیل جملات $x_1.x_2.x_3\ldots$ به‌شکل خطی می باشد .

این مشکل رانیزهمانطورکه‌درمسئله ۷ـ۲ نشان دادیم می‌توانیم حل کنیم فرض کنیدکه جمله مذکوربه‌این شکل $x_1.x_2.x_3\ldots x_q$ باشد .چنین جمله‌ای رابا یک متغیرجدیدبنام x_Q عوض می کنیم ومحدودیت‌های زیررا به‌مدل اضافه می نمائیم .

(۲ـ۱۱)

$$(۱)\quad \sum_{j=1}^{q} x_j - x_Q \leqslant q-1$$

$$(۲)\quad -\sum_{j=1}^{q} x_j + qx_Q \leqslant 0$$

$$(۳)\quad x_Q=0,1$$

۳-۲- یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی با اعداد صحیح

مسئله زیر داده شده است .

$$\max: \quad f = 2x_1^2 + x_1x_2 - 3x_1 \qquad (۲-۱۲)$$

S.To (۱) $x_1 \leqslant 2$

(۲) $x_2 \leqslant 3$

(۳) $x_1 , x_2 = 0,1,2,3,\ldots$

برای تبدیل (۱۲-۲) به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی صفر- یک ، سعی می کنیم که متغیرهای x_1 و x_2 را به کدهای دودوئی (binary) بیان کنیم. با استفاده از (۲-۲) و (۳-۲) ومحدودیت (۱) مسئله (۱۲-۲) میتوانیم بنویسیم .

$$x_1 = y_{01} + 2y_{11}$$

وهمچنین با استفاده از (۳-۲) و (۲-۲) ومحدودیت (۲) مسئله (۱۲-۲) متغیر x_2 را می توانیم بشکل زیر تبدیل کنیم . $x_2 = y_{02} + 2y_{12}$

پس مسئله (۱۲-۲) بشکل زیرخواهدشد .

$$\max: \quad f_1 = 2(y_{01} + 2y_{11})^2 + (y_{01} + 2y_{11})(y_{02} + 2y_{12}) - 3(y_{03} + 2y_{11})$$

$$= 2y_{01}^2 + 8y_{01}y_{11} + 8y_{11}^2 + y_{01}y_{02} + 2y_{01}y_{12} + 2y_{11}y_{02}$$

$$+ 4y_{11}y_{12} - 3y_{01} - 6y_{11}$$

(۲-۱۳)

S.To: (۱) $y_{01} + 2y_{11} \leqslant 2$

(۲) $y_{02} + 2y_{12} \leqslant 3$

(۳) تمام yها $= 0,1$

درتابع آبژکتیو (۲-۱۳) دوجمله ازنوع ay^2 داریم وچون تمام y ها مقادیرصفرویا یک را بخودمیگیرندپس می‌توانیم تمای جملات ay^2 را نادیده فرض‌کنیم . ازطرفی دیگربازدرتابع آبژکتیو (۲-۱۳) پنج جمله ازنوع $ay_{ij}y_{ki}$ داریم که آنها را به‌شکل زیرمی‌توانیم‌جایگزین کنیم .

(۲-۱۴)

(الف) $y_1 = y_{01}y_{11}$

(ب) $y_2 = y_{01}y_{02}$

(ج) $y_3 = y_{01}y_{12}$

(د) $y_4 = y_{11}y_{02}$

(هـ) $y_5 = y_{11}y_{12}$

برای هرکدام ازمعادلات (۲-۱۴) بایدبرطبق (۲-۱۱) دومحدودیت اضافی واردکنیم .بدین ترتیب (۲-۱۴) به‌شکل زیرتبدیل می شود.

$$\max: \quad f_2 = 2y_{01} + 8y_1 + 8y_{11} + y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 4y_5 - 3y_{01} - 6y_{11}$$

S.To:

(۱) $y_{01} + 2y_{11} \leqslant 2$

(۲) $y_{02} + 2y_{12} \leqslant 3$ (۲-۱۵)

(۳) $y_{01} + y_{11} - y_1 \leqslant 1$

(۴) $-y_{01} - y_{11} + 2y_1 \leqslant 0$

(۵) $y_{01} + y_{02} - y_2 \leqslant 0$

(۶) $-y_{01} - y_{02} + 2y_2 \leqslant 0$

(۷) $y_{01} + y_{12} - y_3 \leqslant 1$

(۸) $-y_{01} - y_{12} + 2y_3 \leqslant 0$

$$(۹)\ y_{11} + y_{02} - y_4 \leqslant 1$$

$$(۱۰)\ -y_{11} - y_{02} + 2y_4 \leqslant 0$$

$$(۱۱)\ y_{11} + y_{12} - y_5 \leqslant 1$$

$$(۱۲)\ -y_{11} - y_{12} + 2y_5 \leqslant 0$$

(۱۳) تمام y ها $= 0,1$

(۱۵–۲) یک مسئله برنامه‌ریزی خطی صفر ـ یک می باشد که تبدیل مسئله (۱۲–۲) برنامه‌ریزی غیرخطی با اعداد صحیح است.

۳ـ مسائل خاص درفرمولەکردن الگوهای برنامەریزی

با توجه بەکلیاتی کەدرموردکاربرد روش برنامەریزی صفرـ یک درحل الگوهای برنامەریزی بااعدادصحیح ارائه شدلازم استکەشرایط خاصی راعنوان نمائیم کەفرموله کردن شرایط دنیای واقعی رابه الگوهای ریاضی تسهیل نماید.

۳ـ۱ محدودیت های " یا این/ یا آن "

بعضی اوقات درفرموله کردن یک مسئله برنامه ریزی ریاضی به مسائلی برخوردمی کنیم کەازبین دومحدودیت یکی ازآنها بایدبکارگرفتەشود.بدین معنی کەیا محدودیت اول بکاربرده شودویا محدودیت دوم ولی اگریکی ازدومحدودیت مذکور برقرارگردید.محدودیت دیگرمی تواندبرقرارشودویا برقرارنشود.به عبارت دیگردرمدل طراحی شده فقط لازم استکەیکی ازمحدودیتها برقرارگردد . برای مثال مسئله برنامه ریزی خطی بااعدادصحیحی رافرض کنیدکەدومحدودیت زیررادارا می باشد.

(۱) $4x_1 + 2x_2 \leqslant 6$ (۳ـ۱)

(۲) $x_1 + 3x_2 \leqslant 4$

فرض کنیدبه دلیلی فقط می خواهیم‌یا محدودیت (۱) برقرارشودیا محدودیت (۲) ولی لزوما" نەهردوی آنها . برای این کاریک متغیردودوئی (binary) مانند y رابەسیستم فوق بەترتیب زیراضافه می کنیم

(۱) $4x_1 + 2x_2 - 10^3y \leqslant 6$

(۲) $x_1 + 3x_2 - 10^3 (1-y) \leqslant 4$

(۳) $y = 0,1$

اگر جواب نهائی مقدار y صفرشود دومحدودیت به‌شکل زیرمی شوند .

(۲-۳)

(۱) $4x_1 + 2x_2 \leqslant 6$

(۲) $x_1 + 3x_2 - 10^3 \leqslant 4$ یا $x_1 + 3x_4 \leqslant 4 + 10^3$

که‌حدبالای محدودیت (۲) نافذنخواهدبود وازطرف دیگراگرمقدار y یک‌شود دومحدودیت (۲-۳) به‌شکل زیرخواهدشد .

(۱) $4x_1 + 2x_2 - 10^3 x_3 \leqslant 6$ یا $4x_1 + 2x_2 \leqslant 6 + 10^3$ (۴-۳)

(۲) $x_1 + 3x_2 \leqslant 4$

که‌حدبالای محدودیت (۱) نافذ نخواهدبود .

هرالگوریتم اپتیمم کننده‌ای که برای حل (۲-۳) بکاربرده شودسعی می کندکه محدودیت (۱) یا محدودیت (۲) در (۱-۳) راباانتخاب مقدارمتناسبی برای y طوری بلااستفاده قراردهدکه‌تابع آبژکتیواپتیمم شود .

این روش رامیتوان برای مسائلی که تعدادمحدودیت‌ها بیشترباشندنیز تعمیم داد . اگر q محدودیت داشته‌باشدبطوری که همه آنها $0 \leqslant$ باشند .

$$
\begin{aligned}
g_1 &\leqslant 0 \\
g_2 &\leqslant 0 \\
&\vdots \\
g_q &\leqslant 0
\end{aligned}
\qquad (۵-۳)
$$

برای تضمین اینکه حداقل k محدودیت برقرارشوند q محدودیت (۵-۳) رابه شکل زیرتغییرمی دهیم .

$$
\begin{aligned}
g_1 - A_1 y_1 &\leqslant 0 \\
g_2 - A_2 y_2 &\leqslant 0 \\
&\vdots \\
g_q - A_q\, y_q &\leqslant 0
\end{aligned}
$$

چون $q-k$ حداکثر تعداد محدودیت هائی است که می توانند برقرار شوند پس:

$$\sum_{i=1}^{q} y_i \leqslant q-k$$

وهمچنین شرط دودوئی بودن y_i ها :

$$y_i = 0,1 \quad i=1,2,\ldots,q$$

بطور مثال اگر برقرار شدن حداقل دوتا از سه تا محدودیت مطلوب باشد مسئله به شکل زیر در خواهد آمد :

$q=3$

$k=2$

$$g_1 - 10^3 y_1 \leqslant 0$$
$$g_2 - 10^3 y_2 \leqslant 0$$
$$g_3 - 10^3 y_3 \leqslant 0$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 1$$

$$y_1, y_2, y_3 = 0,1$$

عدد 10^3 یک عدد بسیار بزرگ فرض شده است در موارد لزوم باید عدد بسیار بزرگتری را انتخاب کرد. از طرفی دیگر باید توجه داشت با وجودیکه y ها قسمتی از مسئله می باشند ولی در تابع آبژکتیو ضریب صفر می گیرند.

۲-۳- محدودیتهای هزینه ثابت

در فرموله کردن بعضی از مسائل مکرراً" به این موضوع برخورد می کنیم که اگر یک مقداری از یک منبع بخصوص بکار گرفته شود باید یک هزینه ثابتی را نیز متحمل شد. به عبارت دیگر اگر متغیر x_1 بزرگتر از صفر باشد بدین معنی است که باید مقدار معینی از منبع یک بکار گرفته شود، در نتیجه تابع آبژکتیو باید یک هزینه ثابتی را نیز در خود منعکس نماید. واگر x_1 برابر صفر باشد این هزینه ثابت مقدارش برابر صفر می شود.

برای مثال مسئله زیررادرنظربگیرید.

$$\max: \quad f=20x_1 + 10x_2$$

$$(۳-۶)$$

$$S.To: \quad \left\{ \text{چندین محدودیت} \right\}$$

باتوجه به (۳-۶) بایدتابع ابژکتیوراطوری تغییردهیم که منعکس کننده این حقیقت باشد اگر $x_1 > 0$ باشد باید یک هزینه ۱۲۰۰ ریال درنظر گرفته شود واگر $x_1=0$ باشد هیچ هزینهٔ اضافی منظورنگردد پس:

$$\max: \; f= 20x_1 + 10x_2 - 1200y$$

$$(۳-۷)$$

$$S.To: \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{محدودیتهای } (۳-۶) \\ x_1 \leqslant 10^3 y \end{array} \right\}$$

$$y= 0,1$$

میتوانیم انتظارداشته باشیم که یک الگوریتم اپتیمم کننده که برای مسئله (۳-۷) بکاربرده شود سعی براین داردکه y رامساوی صفرقراردهد چون تابع ابزکتیو حداکثرکننده است وضریب y درآن عددی منفی است. صفرکردن y باعث میشود که x_1 نیزمساوی صفرگردد. اگر $x_1 > 0$ درشرایط محیط ریاضی تصمیم گیری (۳-۷) باصرفه‌ترباشد، به‌هرحال باعث میشودکه الگوریتم اپتیمم کننده، x_1 رابزرگترازصفرنماید حتی علیرغم محدودیت $x_1 \leqslant 10^3 y$ که y رامساوی یک می نماید وباعث میشود که تابع ابزکتیوبه مقدار ۱۲۰۰ واحد کاهش یابد.

بایدتوجه داشت‌که ضریب متغیردودوئی y بایدبزرگترازحدبالای x_1 باشد درمسئلهٔ (۳-۷) فرض شده که ضریب $۱۰^۳$ بزرگترازهرمقدار x_1 خواهدبودکه

انتظار میرود x_1 به خود بگیرید.

این مسئله را نیز میتوان بسادگی درمورد چندقلم هزینه ثابت (هرقلم برای هرمتغیر) دریک مسئله تعمیم داد. به روش مشابه‌ای نیز میتوان این موضوع را نیز فرموله کرد که یک هزینهٔ ثابت باید اضافه شود اگر یک یا چند تا از متغیرها مقداری بیش از صفر بخود بگیرند. برای اینکه در مسئلهٔ خود این موضوع را وارد کنیم که مثلا" اگر یک یا بیشتر از متغیرهای x_1 و x_2 و x_3 بزرگتر از صفر باشند یک هزینه ثابت باید اضافه گردد می نویسیم.

$$x_1 + x_2 + x_3 - 10^3 y \leqslant 0 \qquad (۳-۸)$$

اگر یک یا بیشتر از متغیرهای x بزرگتر از صفر شوند در نتیجه $y=1$ میشود و نتیجتا" ضریب y در تابع ابژکتیو اثرات خود را منعکس میسازد.

۳-۳. محدودیت حذف یک جواب جزئی

گاهی اوقات با توجه به شرایط محیط تصمیم گیری لازم است که تعدادی از جوابهای شدنی و یا نشدنی از جوابهای مسئله حذف گردند. بطور مثال فرض کنید که دریک مسئله متغیرهای x_1 و x_2 بیانگر مقادیر استفاده از دو منبع یک و دو باشند، از طرفی بعللی ترکیب دو منبع یک و دو به شکل $x_1=2$ و $x_2 = 3$ مورد قبول نمیتواند باشد.

دراین حالت x_1 و x_2 را با متغیرهای دودوئی بشکل زیر جایگزین می نمائیم:

$$x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 8y_4 + 16y_5$$

$$x_2 = z_1 + 2z_2 + 4z_3 + 8z_4 \qquad (۳-۹)$$

$$\text{تمام } y\text{ها} = 0,1$$

$$\text{تمام } z\text{ها} = 0,1$$

اگرمقدار x_1 مقدار ۲ را بخودبگیرید و x_2 مقدار ۳، متغیرهای دودوئی باید مقادیرزیررا بخودبگیرند :

$$
\begin{aligned}
y_2 &= 1 \\
y_1 = y_3 = y_4 = y_5 &= 0 \\
z_1 = z_2 &= 1 \\
z_3 = z_4 &= 0
\end{aligned}
\qquad (۳-۱۰)
$$

حال برای حذف کردن جواب جزئی $x_1 = ۲$ و $x_2 = ۳$ (منظوراز جواب جزئی این است که فرض کرده ایم که مسئله ما شامل متغیرهای دیگری نیزهست و درنتیجه جوابهای جزئی دیگری نیزداریم) یک محدودیت دیگراضافه میکنیم :

$$\underbrace{y_2 + z_1 + z_2}\ \underbrace{- y_1 - y_3 - y_4 - y_5 - z_3 - z_4} \leq 2 \qquad (۳-۱۱)$$

متغیرهائی که دارای مقدار یک درجواب حذف شده میباشند . (۳-۱۰)

متغیرهائی که دارای مقدار صفردرجواب حذف شده (۳-۱۰)، میباشند

تعداد جملات مثبت در سمت چپ نامعادله منهای یک

محدودیت (۳-۱۱) بیان می کندکه اگر y_2 و z_1 و z_2 مساوی یک باشند باید یک یا چند تا ازسایرمتغیرهای دودوئی مساوی یک باشند . بدین ترتیب ازترکیب ناخواسته متغیرهای دودوئی ممانعت بعمل می آیدوباعث میشودکه ترکیب $x_1 = ۲$ و $x_2 = ۳$ نشدنی شود .

۳-۴- محدودیت مقادیرگسسته مشخص

اغلب اوقات یک منبع فقط میتواند با مقادیرمشخص بکارگرفته شود . بطور مثال میخواهیم که متغیر x_1 فقط یکی ازمقادیر ۰ و ۳ و ۴/۷ و ۱۲ را بخود بگیرد . برای حصول چنین موضوعی x_1 را با متغیردودوئی y_i جایگزین نموده

ومحدودیتهای زیررا اضافه می نمائیم:

$$(1) \quad x_1 = 3y_1 + 4.7y_2 + 12y_3$$

$$(2) \quad y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 1 \qquad\qquad (3-12)$$

$$(3) \quad \text{تمام } y \text{ ها} = 0,1$$

واضح استکه محدودیت (۲) (۱۲–۳) باعث میشود که یکی از y ها مساوی یک شود یا اینکه تمام y ها مساوی صفرشوندکه تضمین کننده این استکه:

$$x_1 = 0,3,4.7,12$$

شود .

به روش مشابه میتوان فرض دیگری را اعمال نمودبه‌طورمثال میخواهیم مشخص کنیم که اگرمنبعی بخواهداستفاده شود بایددریک مقدارحداقلی بکار برده شود . فرض کنیدکه x_1 باید صفریابزرگتریا مساوی ۶ باشد برای حصول چنین شرطی روش زیررا بکارمی بریم :

$$(1) \quad x_1 + 6y \geqslant 6$$

$$(2) \quad x_1 + 10^3 y \leqslant 10^3 \qquad\qquad (3-13)$$

$$(3) \quad y = 0,1$$

اگرالگوریتم اپتیمم کننده سعی براین داشته باشدکه $x_1 > 0$ شود محدودیت (۲) از (۱۳–۳) سیستم را مجبورمی کندکه y مساوی صفرشودو محدودیت (۱) سبب میشود که $x_1 \geqslant 6$ شود .

۵–۳. محدودیتهای شرطی

دربعضی ازمواقع تصمیم گیرنده مایل بداضافه کردن این محدودیتمیباشد که اگر مقداربکارگرفته شده ازیک منبع بزرگتریا مساوی با مقدارمعینی گردید ، استفاده ازمنبع دیگرمحدودشود . برای مثال مسئله ای رادرنظربگیریدکه شامل

دومتغیر x_1 و x_2 میبا شد که بیانگرمیزان استفاده ازدومنبع یک ودواست . میخواهیم شرطی درمدل واردکنیم کهاگرمیزان استفاده ازیک ۶ واحدبیشتربود میزان استفاده ازمنبع ۲ به ۳ واحدیاکمترکاهش یابد یا :

اگر $x_1 \geqslant 6$ پس $x_1 \leqslant 3$

برای واردکردن شرط فوق متغیزهای دودوئی y_1 و y_2 را معرفی نمـــوده و محدودیتهای زیررا اضافه می کنیم :

(۱) $x_1 y_1 \leqslant 5$

یک عددصحیح کوچکترازعددصحیح محدودیت شرطی برای x_1

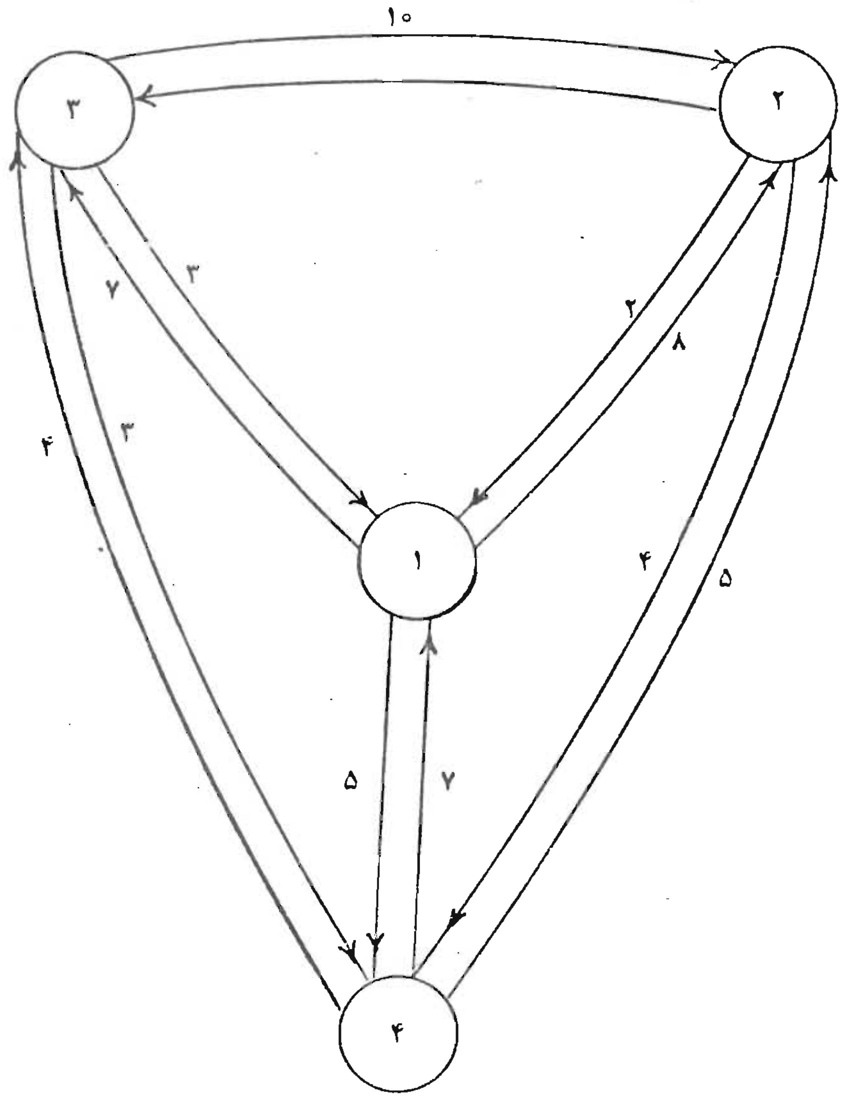
(۲) $x_2 y_2 \leqslant 3$

(۳) $y_1 + y_2 = 1$ (۳-۱۴)

(۴) $y_1 ,\ y_2 = 0,1$

بایدتوجه داشت که محدودیتهای (۳) و (۴) در (۳-۱۴)بیانگراین هستند کهاگر $y_1=1$ پس $y_2=0$ واگر $y_1=0$ پس $y_2=1$. حال اگرالگوریتم ماسعی بر این داشته باشد که $x_1 \geqslant 6$ ، محدودیت (۱) باعث میشود که $y_1=0$ شـــود و محدودیت (۳) باعث میشود که $y_2=1$ شود ومحدودیت (۲) نیزباعث میشودکــه $x_2 \leqslant 3$ شود .

ازطرف دیگراگرسعی براین داشته باشدکه x_1 مساوی یاکمترازه شود بـــا توجه به (۱) y_1 میتواندیاصفرباشدیایک و y_2 هم میتواندباصفرباشدیـــا یک وباتوجه به (۲) متغیر x_2 میتواندمساوی ; یابیشتریاکمترازه شـــودو بنابراین محدودنمیشود .



(تصویر ۱)

۴. الگوهای کاربردی

با توجه به نکاتی که ذکرگردیدشاید واضح باشد که با استفاده از روش برنامه ریزی صفر ـ یک بتوان مسائل بسیاری را حل نمود . در این قسمت سعی میشود مثالهائی آورده شود تا فقط ذهن خواننده نسبت به روش فرموله کردن اینگونه مدلها آشنا گردد .

۱ـ۴ـ مسئله فروشنده ٔ دوره گرد

فرض کنید که چهار شهر ۱و ۲و۳و۴ طوری به همدیگر راه دارندکه یک نفر میتواند مستقیما " از آنجا به سایر شهرها برود . راههای متصل کننده این چهار شهر درتصویر ۱ نشان داده شده است ارقامی که برروی پیکانها میباشد بیانگرهزینه ٔ رفتن از شهرمبداء به شهرمقصدمیباشد . لازم بتذکراست که شبکه ٔ ۱ قرینه نمیباشد بدین معنی که هزینه ٔ رفتن از شهر i به شهر j برابرهزینه رفتن از شهر j به شهر i نیست (این خصوصیت قرینه نبودن برای کلی بودن مسئله آورده شده است) .

فروشنده دوره گردی که درشهریک قرار دارد میخواهد به تمام شهرها مسافرت کند وبعد به شهریک برگردد مسئله وی این است که چگونه این مسافرت را آغاز نماید که هزینه وی حداقل گردد .

تصویر ۱ را میتوان درماتریس زیرآورد :

	شهر i \ شهر j	۱	۲	۳	۴
از	۱	∞	۸	۷	۵
	۲	۲	∞	۶	۴
	۳	۳	۱۰	∞	۳
	۴	۷	۵	۴	∞

(تصویر ۲)

عضوهای ماتریس تصویر ۲ نمایانگر هزینه رفتن از شهر i به شهر j میباشند
عضوهائی که در قطر اصلی این ماتریس قرار دارند برابر بینهایت هستند چون فرض این است که فروشنده دوره گرد نمیتواند از شهر k ام به شهر k ام برود
برای حل مسئله فوق به عضوهای شدنی ماتریس تصویر ۲ یک متغیر x_{ij} را منصوب می نمائیم (تصویر ۳)

	۱	۲	۳	۴
۱	∞	x_{12} 8	x_{13} 7	x_{14} 5
۲	x_{21} 2	∞	x_{23} 6	x_{24} 4
۳	x_{31} 3	x_{32} 10	∞	x_{34} 3
۴	x_{41} 7	x_{42} 5	x_{43} 4	∞

(تصویر ۳)

باید توجه داشت که هرجواب شدنی این مسئله (شامل جواب اپتیمم) توسط فقط وفقط یک عضو از هر ردیف وفقط وفقط یک عضو از هرستون مشخص میشود . فرض کنیم اگر $x_{ij}=1$ باشد بدین معنی است که فروشنده از شهر i به شهر j مسافرت کند، و اگر $x_{ij}=0$ باشد فروشنده از شهر i به شهر j مسافرت نکند. بنابراین یکی از جوابهای شدنی مسئله $x_{13} = x_{32} = x_{24} = x_{41} = 1$ وباقی متغیرها مساوی صفر خواهد بود وبدین معنی است که مسیر حرکت از یک به سه ، از سه به دو از دو به چهار و از چهار به یک میباشد .

برای اطمینان از اینکه جواب ما فقط وفقط یک عضو در هر ردیف را دربر دارد محدودیت های زیر لازم میباشند :

$$x_{12}+x_{13}+x_{14}=1$$
$$x_{21}+x_{23}+x_{24}=1$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{34}=1$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}=1$$

وهمچنین برای اطمینان از اینکه جواب ما فقط وفقط یک عضودرهرستون رادربر دارد محدودیت‌های زیرضروری هستند :

$$x_{21}+x_{31}+x_{41}=1$$
$$x_{12}+x_{32}+x_{42}=1$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{43}=1$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=1$$

اگرفروشندهٔ دوره‌گردازشهر i به j برود دیگرنبایدازشهرj به شهرi برودبنابراین محدودیتهای زیررااضافه می کنیم :

$$x_{12}+x_{21}\leqslant 1$$
$$x_{13}+x_{31}\leqslant 1$$
$$x_{14}+x_{41}\leqslant 1$$
$$x_{23}+x_{32}\leqslant 1$$
$$x_{24}+x_{42}\leqslant 1$$
$$x_{34}+x_{43}\leqslant 1$$

همینطور اگرازشهرi به شهر j وبعدبه‌شهرk برود دیگرنباید ازشهر k به‌شهر i برود چون این امرباعث میشود که به‌یک شهردوبارواردشود پس محدودیتهای زیررااضافه می کنیم :

$$x_{12}+x_{23}+x_{31}\leqslant 2$$
$$x_{12}+x_{24}+x_{42}\leqslant 2$$
$$x_{13}+x_{32}+x_{21}\leqslant 2$$
$$x_{13}+x_{34}+x_{41}\leqslant 2$$
$$x_{14}+x_{42}+x_{21}\leqslant 2$$
$$x_{14}+x_{43}+x_{31}\leqslant 2$$

$x_{21} + x_{13} + x_{32} \leqslant 2$

$x_{21} + x_{14} + x_{42} \leqslant 2$

$x_{23} + x_{31} + x_{12} \leqslant 2$

$x_{23} + x_{34} + x_{42} \leqslant 2$

$x_{24} + x_{41} + x_{12} \leqslant 2$

$x_{24} + x_{43} + x_{32} \leqslant 2$

$x_{31} + x_{12} + x_{23} \leqslant 2$

$x_{31} + x_{14} + x_{43} \leqslant 2$

$x_{32} + x_{21} + x_{13} \leqslant 2$

$x_{32} + x_{24} + x_{43} \leqslant 2$

$x_{34} + x_{41} + x_{13} \leqslant 2$

$x_{34} + x_{42} + x_{23} \leqslant 2$

$x_{41} + x_{12} + x_{24} \leqslant 2$

$x_{41} + x_{13} + x_{34} \leqslant 2$

$x_{42} + x_{21} + x_{14} \leqslant 2$

$x_{42} + x_{23} + x_{34} \leqslant 2$

$x_{43} + x_{31} + x_{14} \leqslant 2$

$x_{43} + x_{32} + x_{24} \leqslant 2$

تابع ابژکتیو مسئله باید حداقل کننده‌ٔ هزینه مسافرت فروشنده‌ٔ دوره‌گرد باشد پس :

$$\min: f = 8x_{12} + 7x_{13} + 5x_{14} + 2x_{21} + 6x_{23} + 4x_{24} + 3x_{31} + 10x_{32} + 3x_{34} + 7x_{41} + 5x_{42} + 4x_{43}$$

یک محدودیت دیگرنیزبایداضافه کنیم وآن شرط دودوئی بوده x_{ij} هااست :

تمام x_{ij} = ۰ و ۱

۲ـ۴. مسئله کوله‌بار

فرض‌کنید مسافری حق دارد که حداکثر ۳۰ کیلوبار باخودحمل نمایدولی وسایل زیادی رامیخواهدباخودحمل کند . مسئله وی این است‌که چگونه با محدودیت ۳۰ کیلو، بتواندباارزشترین وسائل خود راباخودحمل نماید؟ به عبارت‌دیگروی درصدداست‌که ارزش‌کوله‌بارش باتوجه به محدودیت وزنی‌آن حداکثرشود .

وی میتواندا قلام مندرج درجدول تصویر۴ راباخودحمل نماید .

وزن (کیلو)	ارزش	نام	شماره قلم
۱	۳۵۰۰	ساعت	۱
۴	۸۵۰۰	دوربین فیلم‌برداری	۲
۱۷	۱۲۵۰۰	پروژکتور	۳
۲	۲۷۰۰	دوربین چشمی	۴
۳	۹۴۰۰	تلسکوپ	۵
۴	۱۰۰۰	دوربین عکاسی	۶
۱۳	۱۴۰۰۰	تلویزیون	۷
۳	۲۵۰۰	رادیو	۸

(تصویر ۴ .)

اگرچه شاید بتوان مسئله وی راازطرق مختلفی حل کرد برای مثال‌میتوان روشهای آزمون وخطارادراینموردبکارگرفت . ولی دراین گونه روشها برای

مثال ما باید 2^8 جواب یعنی ۲۵۶ جواب را شمارش کنیم . با اینکه شاید بتوان ۲۵۶ جواب را براحتی بررسی نمود ولی وقتی که تعداد اقدام بیشتر از ۸ باشد این روش بسیار وقت گیر خواهد بود . مثلا" اگر تعداد اقلام صد باشد باید بیش از 10^{30} (یعنی یک و ۳۰ صفر جلوی آن) جواب را بشماریم که عملا" ممکن نخواهد بود . شاید فکر کنید که حل این مسئله با دست خیلی مشکل است ولی با استفاده از کامپیوتر بتوان براحتی آنرا حل نمود! باید گفت حتی با داشتن کامپیوترهائی خیلی خیلی سریعتر از کامپیوترهای امروزی که مثلا" قادر باشد یک میلیارد جواب را در هر ثانیه شمارش کند برای حل این مسئله احتیاج به پیش از یک میلیارد قرن زمان دارد . این موضوع برتری روش برنامه ریزی صفر ـ یک را به وضوح نشان میدهد .

برای حل مسائلی نظیر فوق براحتی مدل برنامه ریزی صفر ـ یک لازم را فرموله می کنیم . فرض کنید :

تعداد ساعت که میتواند با خود ببرد	x_1
تعداد دوربین فیلم برداری که میتواند با خود ببرد	x_2
تعداد پروژکتور که میتواند با خود ببرد	x_3
تعداد دوربین چشمی که میتواند با خود ببرد	x_4
تعداد تلسکوپ که میتواند با خود ببرد	x_5
تعداد دوربین عکاسی که میتواند با خود ببرد	x_6
تعداد تلویزیون که میتواند با خود ببرد	x_7
تعداد رادیو که میتواند با خود ببرد	x_8

حال این شرط را اضافه می کنیم :

$$x_j = 1 \text{ و } 0 \qquad j = 1 \text{ و } \ldots \text{ و } 8$$

شرط فوق بیانگر این خواهد بود که x_j ها برابر با صفر یا یک خواهند بود به عبارت دیگر تعدادی که از هر کدام از اقلام میتواند ببرد یا صفر است یا یک یعنی میتواند یا آنرا نبرد یا یک عدد از آن قلم را ببرد . ولی محدودیت دیگری برای

وی وجود دارد که نمیتواند بیش از ۳۰ کیلو با خود با رحمل کند پس :

$$1x_1 + 4x_2 + 17x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 13x_7 + 3x_8 \leqslant 30$$

تابع ابژکتیووی بشکل زیر خواهد بود که سعی بر حداکثر کردن ارزش کوله بارش دارد :

$$\max: \quad f = 3500x_1 + 8500x_2 + 13500x_3 + 2700x_4 + 9400x_5$$

$$+ 1000x_6 + 14000x_7 + 2500x_8$$

شرایط دیگر را نیز میتوانیم اضافه کنیم . برای مثال فرض کنید که حجم کوله بار مسافر مزبور نباید بیش از مقدار معینی مثلا" ۱۰۰ دسی مترمکعب باشد .اگر حجم هرکدام از اقلام فوق بترتیب جدول تصویر ۵ باشد محدودیت زیر را نیز باید اضافه کنیم .

$$5x_1 + 15x_2 + 35x_3 + 23x_4 + 33x_5 + 7x_6 + 55x_7 + 15x_8 \leqslant 100$$

شماره قلم	نام	ارزش	وزن (کیلو)	حجم (دسیمترمکعب)
۱	ساعت	۳۵۰۰	۱	۵
۲	دوربین فیلمبرداری	۸۵۰۰	۴	۱۵
۳	پروژکتور	۱۳۵۰۰	۱۷	۳۵
۴	دوربین چشمی	۲۷۰۰	۲	۲۳
۵	تلسکوپ	۹۴۰۰	۳	۳۳
۶	دوربین عکاسی	۱۰۰۰	۴	۷
۷	تلویزیون	۱۴۰۰۰	۱۳	۵۵
۸	رادیو	۲۵۰۰	۳	۱۵

(تصویر ۵)

باز هم شرایط دیگری را میتوانیم وارد مدل کنیم مثلا" مسافر مذکور میگوید من میخواهم حتما " یا رادیو و یا تلویزیون را با خود ببرم (اقلام ۷ و ۸)

واین بدین معنی است که اگرهردوی آنها را ببردا یراد ندارد . پس برای وارد کردن این فرض درمدل محدودیت زیررا اضافه می کنیم :

$$x_7 + x_8 \geqslant 1$$

ازطرفی دیگرممکن است وی مایل باشد که یا تلسکوپ ویا دوربین چشمی را برای حمل انتخاب کند .بدین معنی که اگرتلسکوپ را با خودببرد دیگردوربین چشمی را نبرد وبلعکس . محدودیت زیرنتیجه این شرط است :

$$x_4 + x_5 \leqslant 1$$

این فرض را نیزاضافه کنیم . مسافر می گوید " که بدون دوربین فیلمبرداری پروژکتوررا نمیبرم " پس :

$$x_3 \leqslant x_2$$

ویا

$$x_3 - x_2 \leqslant 0$$

۳-۴. مسئله انتخاب روش تبلیغات

یک شرکتی را درنظربگیرید که مبلغ ۷۰۰/۰۰۰ واحدپولی را برای تخصیص بین روشهای مختلف تبلیغاتی درنظرگرفته است . ازطرفی وی با محدودبودن تعدادساعات کارنویسندگان ، هنرمندان و ویرایشگران به ترتیب به مقدار ۱۰۰۰ ساعت ، ۱۲۰۰ ساعت و ۱۱۰۰ ساعت روبرواست . مسئله شرکت مزبوراین است که مبلغ پولی راکه برای این کاردرنظرگرفته است چگونه بین روشهای مختلف تبلیغاتی توزیع کند که حداکثر تعدادمشتریان را به خودجلب نماید . اطلاعات لازم درجدول تصویر۶ جمع آوری شده است .

شماره روش	۱	۲	۳	۴	۵	۶
نام	مستقیم	دادن جایزه به مشتری	تلویزیون	مجله	آموزش فروشندگان	تصاویر دیواری
هزینه	۱۰۰٬۰۰۰	۴۰٬۰۰۰	۳۰۰٬۰۰۰	۲۵۰٬۰۰۰	۱۰۰٬۰۰۰	۴۰۰٬۰۰۰
تعداد مشتری	۲۰۰٬۰۰۰	۵۰٬۰۰۰	۴۰۰٬۰۰۰	۳۰۰٬۰۰۰	۷۵٬۰۰۰	۶۰۰٬۰۰۰
تعداد ساعت کار لازم نویسندگان	۶۰۰	—	۹۰۰	۳۰۰	۱۰۰	—
تعداد ساعات کار لازم هنرمندان	۲۰۰	—	۳۰۰	۷۰۰	—	۴۰۰
تعداد ساعات کار لازم ویرایشگران	۸۰۰	—	۱۰۰	۲۰۰	—	—

تصویر ۶

قبل از شروع به فرموله کردن این مدل باید بخاطر داشت که قسمت اعظم کار جدول تصویر ۶ میباشد که قبلاً" آماده شده است . ولی اگر جدول ۶ را نداشتیم میبایست تمام اقلام مذکور در آن را به روشهای مختلف تخمین می زدیم .

با استفاده از جدول تصویر ۶ شروع به فرموله کردن مسئله می نمائیم. متغیرهای x_1 تا x_6 را بعنوان تعداد با استفاده از هرکدام از شش روش در

نظرمی گیریم (پس اگر $x_i=0$ بودیعنی روش i ام رااستفاده نمی کنیم و اگر $x_i=1$ بود یعنی روش i ام استفاده میشود ـ وازطرفی نمی توانیم $x_i > 1$ داشته باشیم) پس تابع ابژکتیو بشکل زیرمیشود :

$$\max: \ f = 200{,}000x_1 + 50{,}000x_2 + 400{,}000x_3 + 300{,}000x_4 + 75{,}000x_5 + 600{,}000x_6$$

که سعی برحداکثرکردن تعدادمشتریان دارد . محدودیت بودجه شرکت درمحدودیت زیربیان میگردد :

$$100{,}000x_1 + 40{,}000x_2 + 300{,}000x_3 + 250{,}000x_4 + 100{,}000x_5 + 400{,}000x_6 \leqslant 700{,}000$$

محدودیت تعدادساعات کارنویسندگان ازقرارذیل است :

$$600x_1 + 0x_2 + 900x_3 + 300x_4 + 100x_5 + 0x_6 \leqslant 1000$$

محدودیت تعدادساعات کارهنرمندان بشکل زیرمی باشد :

$$200x_1 + 0x_2 + 300x_3 + 700x_4 + 0x_5 + 400x_6 \leqslant 1200$$

وهمینطورمحدودیت تعدادساعات کارویرایشگران :

$$800x_1 + 0x_2 + 100x_3 + 200x_4 + 0x_5 + 0x_6 \leqslant 1100$$

وبالاخره محدودیت دودوئی مسئله :

$x_j = 0$ او $\qquad j = 1$ و ....و ۶

۴ـ۴. مسائل انتصاب (assignment)

یکسری ازمسایل که بطورکلی بنام مسائل انتصاب (assignment) خوانده میشوندگونه‌ای ازمسائل هستند که سعی دارند یک سری منابع رابه یک سری ازموارد تخصیص دهند بطوریکه هرموردفقط یک منبع رااستفاده نماید ویاهرمنبع فقط دراستفاده یک موردباشد . برای توضیح بیشتر

مثالهای زیررادرنظربگیرید .

مثال ۱

فرض کنید ۵ نفرکارگرطوری باید به ۵ کارمشخص منصوب شوند که با این انتصاب هزینهٔ کارفرماحداقل گردد . واضح خواهدبود که هرکارگربیش ازیک کارنمی تواندداشته باشد . هزینه ای که دراثرانتصاب نفر i ام به کار j ام به کارفرما تحمیل میگردد درجدول تصویر ۷ آورده شده . عنصر ij ام درجدول ۷ بیانگر این است که اگرنفر i ام رابرشغل j ام منصوب کنیم مقدار هزینه ای که ازتقاطع ردیف i ام وستون j ام حاصل میشود رابایدمتحمل شویم .

کار / نفر	کاراول	کاردوم	کارسوم	کارچهارم	کارپنجم
نفراول	۵	۲	۷	۸	۹
نفردوم	۴	۴	۶	۹	۸
نفرسوم	۷	۸	۱۰	۱۲	۱۰
نفرچهارم	۹	۳	۲	۱۵	۱۲
نفرپنجم	۵	۵	۸	۱۲	۱۷

(تصویر ۷)

برای فرموله کردن این مسئله متغیر x_{ij} راتعریف می کنیم که i نشاندهندهٔ ردیف یانفراست و j نشاندهندهٔ ستون یاکارهای تصویر۷می باشد فرض می کنیم که $x_{ij}=1$ بدین معنی باشد که نفر i ام رابه کار j ام منصوب کنیم و $x_{ij}=0$ بدین معنی باشد که نفر i ام رابه کار j ام منصوب نکنیم . تابع ابژکتیو مسئله یعنی حداقل کردن هزینه های ناشی ازانتصاب افراد به کارها به شکل زیرمیشود :

$$\min: \quad f = 5x_{11} + 3x_{12} + 7x_{13} + 8x_{14} + 9x_{15}$$
$$+ 4x_{21} + 4x_{22} + 6x_{23} + 9x_{24} + 8x_{25}$$
$$+ 7x_{31} + 8x_{32} + 10x_{33} + 12x_{34} + 10x_{35}$$
$$+ 9x_{41} + 3x_{42} + 2x_{44} + 15x_{44} + 12x_{45}$$
$$+ 5x_{51} + 2x_{52} + 8x_{53} + 12x_{54} + 17x_{55}$$

محدودیتهای زیربیانگر این هستند که یک نفرفقط سریک کارباشد.

برای نفراول $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$

برای نفردوم $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$

برای نفرسوم $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1$

برای نفرچهارم $x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1$

برای نفرپنجم $x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1$

محدودیتهایی که بیانگراین موضوع هستند هرکارفقط به یک نفرداده شود از قرار ذیل میباشند:

برای کاراول $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$

برای کاردوم $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$

برای کارسوم $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1$

برای کارچهارم $x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1$

برای کارپنجم $x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1$

وشرط دودوئی بود x ها :

$x_{ij}=0$ و ۱ $i=1$ و... و ۵ $j=1$ و... و ۵

مثال ۲

سه کشتی بایددریک بندرگاه که دارای سه اسکلهٔ تخلیه میباشد تخلیه شوند. با توجه به محموله کشتی ها وتسهیلات تخلیهٔ با رزمانهای مختلفی برای تخلیهٔ هرکشتی درهراسکله وجوددارد . این اطلاعات درجدول تصویر ۸ آورده شده‌اند .

اسکله \ کشتی	۱	۲	۳
۱	۵	۱۳	۱۹
۲	۱۳	۱۰	۱۵
۳	۱۱	۱۵	۲۷
۴	۱۵	۹	۶

(تصویر ۸)

جدول تصویر ۸ نشاندهندهٔ تعدادروزهای لازم برای تخلیه هرکشتی درهر اسکله می باشد . مسئله ما این است که کدام کشتی درکدام اسکله تخلیه شودکه کل روزهای تخلیه حداقل گردد برای فرموله کردن این مسئله متغیردودوئی x_{ij} رابه شکل زیرتعریف می کنیم :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگرکشتی } i \text{ به بندر } j \text{ منصوب شود} \\ 0 & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

تابع ابژکتیوبه شکل زیرخواهدبود :

$$\min: \quad f = 5x_{11} + 13x_{12} + 11x_{13} + 15x_{14} + 13x_{21} + 10x_{22}$$

$$+ 15x_{23} + 9x_{24} + 19x_{31} + 15x_{32} + 27x_{33} + 6x_{34}$$

برای اینکه هرکشتی فقط به یک اسکله منصوب شود

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$

وبرای تضمین اینکه درهر اسکله فقط یک کشتی پهلو بگیرد

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leqslant 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leqslant 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leqslant 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \leqslant 1$$

وشرط دودوئی بودن

$x_{ij} =$ ۰ و ۱ $\qquad i =$ ۱و...و۳ $\qquad j =$ ۱و...و۴

۵-۴. مسئله موزن کردن خط تولید

مسئله موزن کردن خط تولیداین است که باید تصمیم گرفت که درهر رشته تولید کدام کار باید توسط کدام کارگر انجام شود. یکی از راههای اقتصادی تصمیم گیری فوق حداقل کردن تعداد کارگران (یا تعداد ایستگاهها یا گروه بندی کارها) برای یک نرخ تولید می باشد. برای مثال جدول تصویر ۹ را درنظر بگیرید :

کارهای قبلی که باید انجام شده باشند	زمان	شماره کار
—	۳	۱
—	۵	۲
۲	۲	۳
۱/۳	۶	۴
۲	۹	۵
۵و۴	۳	۶
—	۴	۷
۷	۱	۸
۸	۳	۹
۹و۶	۵	۱۰

(تصویر ۹)

نرخ تولید باید ۴ محصول یا بیشتر در هر ساعت باشد. قدم اول پیدا کردن یک جواب شدنی می باشد. میدانیم که ۱۰ نفر کارگر میتوانند خط تولید را براه اندازند، اما این روش دارای کارآئی چندانی نیست چون هر نفر فقط یک کار را انجام میدهد. با کمی بررسی جواب شدنی تصویر ۱۰ آشکار میگردد.

زمان لازم	کارهای منصوب شده	شماره کارگر یا ایستگاه
۱۰	۳و۲و۱	۱
۱۵	۵و۴	۲
۸	۸و۷و۶	۳
۸	۱۰و۹	۴

(تصویر ۱۰)

ازتصویر ۱۰ واضح است که ۴ کارگر میتوانند با حداکثر زمان ایستگاه پانزده دقیقه (شماره ۲) خط تولید را به راه اندازند. حال سئوال این است آیا سه ایستگاه ویا کمتر هم میتوانند این کار را انجام دهند؟ البته، نرخ تولید حداکثر توسط زمان لازم برای مشغول ترین ایستگاه کار تعیین می شود. مادامیکه هیچ ایستگاهی بیشتر از ۱۵ دقیقه وقت نمی گیرد، نرخ تولید حداقل ۴ در ساعت خواهد بود (دقیقه ۱۵×۴= ۱ ساعت).

برای این مسئله احتیاج به دو مجموعهٔ متغیرهای دودوئی داریم. x_{ij} را به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر کار } i \text{ توسط ایستگاه یا کارگر } j \text{ انجام نشود} \\ 1 & \text{اگر کار } i \text{ توسط ایستگاه یا کارگر } j \text{ انجام شود} \end{cases}$$

ازطرفی احتیاج به متغیری داریم که به مدل اجازه بدهد تا اگر لازم باشد یکی از ایستگاهها را حذف نماید پس S_j را به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$S_j = \begin{cases} 0 & \text{اگر ایستگاه (کارگر) } j \text{ موردلزوم نیست} \\ 1 & \text{اگر ایستگاه (کارگر) } j \text{ موردلزوم است} \end{cases}$$

این دو متغیر باعث تولید ۴۴ متغیر میگردند چهارتا برای S_j ها و ۴۰(۴×۱۰) متغیر برای x_{ij} ها.

تابع ابژکتیو مدل سعی برحداقل کردن تعداد ایستگاهها دارد پس به شکل زیر است :

$$\min: \quad f = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$$

حال شروع می کنیم به فرموله کردن محدودیتها. واضح است که هر کار

باید انجام شود چه توسط ایستگاه (یا کارگر) یک یا دو یا سه و یا چهار پس سری محدودیتهای زیر را برای تضمین این شرط به شکل زیر بنویسیم :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1$$

$$x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} = 1$$

$$x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} = 1$$

$$x_{81} + x_{82} + x_{83} + x_{84} = 1$$

$$x_{91} + x_{92} + x_{93} + x_{94} = 1$$

$$x_{10,1} + x_{10,2} + x_{10,3} + x_{10,4} = 1$$

ازطرفی هیچ ایستگاهی نمیتواند بیشتر از ۱۵ دقیقه وقت بگیرد . از آنجائیکه $x_{11}=1$ بدین معنی است که کار یک در ایستگاه یک انجام شود ، میتوانیم بگوئیم که $3x_{11}$ برابر زمان لازم برای انجام کار یک در ایستگاه یک می باشد . از جهت دیگر اگر $x_{11}=0$ باشد بدین معنی است که هیچ زمانی برای انجام کار یک در دستگاه یک لازم نمی باشد ، چون $3x_{11}$ هم مساوی صفر میشود بنا براین کل زمانی که در ایستگاه ۱ گرفته میشود نباید بیش از ۱۵ دقیقه باشد پس :

$$3x_{11}+5x_{21}+2x_{31}+6x_{41}+9x_{51}+3x_{61}+4x_{71}+1x_{81}+3x_{91}+5x_{10,1} \leqslant 15$$

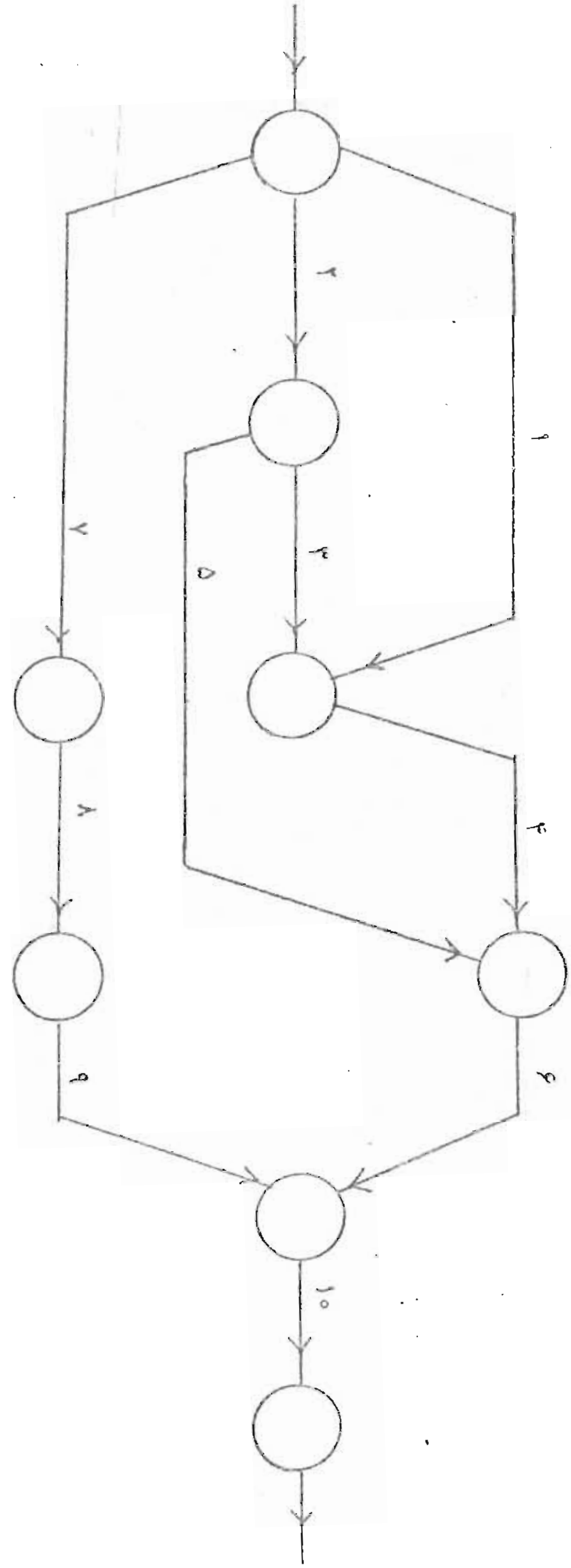
همچنین برای سایرایستگاهها میتوانیم بنویسیم:

$$3x_{12} + 5x_{22} + 2x_{32} + 6x_{42} + 9x_{52} + 3x_{62} + 4x_{72} + 1x_{82} + 3x_{92} + 5x_{10,2} \leqslant 15$$

$$3x_{13} + 5x_{23} + 2x_{33} + 6x_{43} + 9x_{53} + 3x_{63} + 4x_{73} + 1x_{83} + 3x_{93} + 5x_{10,3} \leqslant 15$$

$$3x_{14} + 5x_{24} + 2x_{34} + 6x_{44} + 9x_{54} + 3x_{64} + 4x_{74} + 1x_{84} + 3x_{94} + 5x_{10,4} \leqslant 15$$

زمان وقوع هرکدام ازکارها درجدول تصویر۹ به روش مسیربحرانی(CPM) درشبکهٔ زیرنشان داده شده است . تصویر۱۱ بخوبی عملکردمحدودیتهایی که الان راجع به آن صحبت می کنیم رانشان میدهد . دوپیکانی که به گروه مبداء واردوازگروه مقصد خارج شده اندنمایانگراین امرهستندکه شبکهٔ زیر تنهایک پروژه رانمایش نمی دهد بلکه پروسه های یک پروژه بزرگ رامعین می کند . بدین معنی که وقتی فعالیت ۲ تمام شد فعالیت ۳ شروع می شودولی نه بدین معنی که فعالیت ۲ دوباره شروع نشود . دوپیکان مزبورمسئلهٔ دینامیک خط تولید رامشخص می سازند .



تصویر ۱۱

حال محدودیتهای دیگررا بررسی کنیم . همانطورکه ازجدول تصویر ۹ برمی آید ،کار ۲ بایدقبل ازکار ۳ انجام شود .اگرمیتوانستیم که کار ۳ در ایستگاه ۳ انجام میشود می توانستیم بگوئیم که کار ۲ بایددرایستگاه ۱یا ۲ یا ۳ انجام‌شود پس :

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$

ولی تنها این شرط مقررمیداردکه‌کار ۲ درایستگاه ۳ انجام می شود یعنی $x_{۳۳}=۱$. ولی اگر $x_{۳۳}=۰$ باشد $x_{21}+x_{22}+x_{23}$ دیگر اهمیتی نمی تواندداشته باشد . این موضوع رابه عبارتی پرمعنی ترمی توانیم به شکل زیرعنوان کنیم .

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geqslant x_{33}$$

محدودیت فوق بیانگرامکان انجام کار ۳ درایستگاه ۳ می باشد .اگرکار ۳ رادرایستگاه ۴ (ایستگاه آخر) انجام دهیم ، هیچ مشکلی ایجادنمی شود. چون تمام کارهاباید درایستگاه ۴ یاقبل ازایستگاه ۴ انجام شوند . برای اطمینان اینکه کار ۲ درایستگاه ۲یاقبل ازآن انجام شود موقع ایکه کار ۳ درایستگاه ۲ انجام شوداحتیاج به محدودیت زیرداریم :

$$x_{21} + x_{22} \geqslant x_{32}$$

همینطوراگرکار ۳ درابستگاه ۱انجام شود .

$$x_{21} \geqslant x_{31}$$

همین طوربرای سایرشرایط مذکوردرستون سمت راست جدول تصویــــــــر ۹ محدودیتهای زیررابایداضافه کنیم :

کار۱ باید قبل ازکار۴ انجام شود :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geqslant x_{43}$$

$$x_{11} + x_{12} \geqslant x_{42}$$

$$x_{11} \geqslant x_{41}$$

کار۳ بایدقبل از۴ انجام شود.

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \geqslant x_{43}$$

$$x_{31} + x_{32} \geqslant x_{42}$$

$$x_{31} \geqslant x_{41}$$

۲ بایدقبل از۵ باشد.

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geqslant x_{53}$$

$$x_{21} + x_{22} \geqslant x_{52}$$

$$x_{21} \geqslant x_{51}$$

۴ بایدقبل از۶ باشد.

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} \geqslant x_{63}$$

$$x_{41} + x_{42} \geqslant x_{62}$$

$$x_{41} \geqslant x_{61}$$

۵ باید قبل از ۶ باشد:

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} \geqslant x_{63}$$
$$x_{51} + x_{52} \geqslant x_{62}$$
$$x_{51} \geqslant x_{61}$$

۷باید قبل از ۸ باشد:

$$x_{71} + x_{72} + x_{73} \geqslant x_{83}$$
$$x_{71} + x_{72} \geqslant x_{82}$$
$$x_{71} \geqslant x_{81}$$

۸ باید قبل از ۹ باشد:

$$x_{81} + x_{82} + x_{83} \geqslant x_{93}$$
$$x_{81} + x_{82} \geqslant x_{92}$$
$$x_{81} \geqslant x_{91}$$

۶ باید قبل از ۱۰ باشد:

$$x_{61} + x_{62} + x_{63} \geqslant x_{10,3}$$
$$x_{61} + x_{62} \geqslant x_{10,2}$$
$$x_{61} \geqslant x_{10,1}$$

وبالاخره ۹ باید قبل از ۱۰ باشد:

$$x_{91} + x_{92} + x_{93} \geqslant x_{10,3}$$
$$x_{91} + x_{92} \geqslant x_{10,2}$$
$$x_{91} \geqslant x_{10,1}$$

بطورکلی L تاکار باید قبل از کار m ام انجام شود برای n ایستگاه میتوانیم بنویسیم :

برای ایستگاه ۱ $$x_{L1} \geqslant x_{m1}$$

برای ایستگاه ۲ $$x_{L1} + x_{L2} \geqslant x_{m2}$$

برای ایستگاه ۳ $$x_{L1} + x_{L2} + x_{L3} \geqslant x_{m3}$$

برای ایستگاه ۴ $$x_{L1} + x_{L2} + x_{L3} + x_{L4} \geqslant x_{m4}$$

$$\vdots$$

برای ایستگاه (n-1) ام

$$x_{L1} + x_{L2} + x_{L3} + x_{L4} \cdots + x_{L,(n-1)} \geqslant x_{m,(n-1)}$$

حال به محدودیتهای نوع دیگری بپردازیم که باید در مدل آورده شوند. اگر ایستگاهی مورد استفاده واقع نشود (یعنی ٥= S_j) هیچ کاری هم انجام نمی‌دهد. پس اگر ایستگاه اول حذف شود، هیچ کاری نمیتوان به آن رجوع نمود. و اگر ایستگاه ۱ مشغول کار باشد حداکثر تعداد کارها یا کمتر را انجام می‌دهد و در این مثال چون تعداد کارها ۱٥ کار میباشد پس برای ایستگاه ۱ باید این محدودیت را اضافه کنیم :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} + x_{81} + x_{91} + x_{10,1} \leqslant 10S_1$$

برای سایر ایستگاهها نیز این شرط را اضافه می کنیم :

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} + x_{72} + x_{82} + x_{92} + x_{10,2} \leqslant 10S_2$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} + x_{73} + x_{83} + x_{93} + x_{10,3} \leqslant 10S_3$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} + x_{74} + x_{84} + x_{94} + x_{10,4} \leqslant 10S_4$$

٦-۴. مسئله جفت کردن

تولیدکننده‌ای با این مسئله روبرو می باشد، وی دارای ۶ میله و ۵ یاطاقان بوده با توجه به دقتی که باید صرف جفت کردن میله‌ها و یاطاقان ها شود، وی می خواهد حداکثر تعداد یاطاقانها و میله‌ها را به هم جفت نماید. جدول تصویر ۱۲ نشاندهنده قابلیت جفت شدن هر میله به هر یاطاقان می باشد.

میله \ یاطاقان	۱	۲	۳	۴	۵
۱	—	—	—	*	—
۲	*	*	*	—	—
۳	—	—	—	*	—
۴	—	—	*	*	—
۵	—	—	—	*	—
۶	*	—	*	—	*

* قابل جفت شدن

ـ غیرقابل جفت شدن

(تصویر ۱۲)

برای مثال درجدول فوق ردیفی که مربوط به میله ۲ می باشدنشاندهندهٔ این است که میلهٔ دوم به یاطاقانهای ۱ و ۲ و ۳ میتواندجفت شودولی به ۴و۵ نمی تواند. برای حل این مسئله جدول تصویر ۱۲ را به تصویر ۱۳ تبدیل می نمائیم بطوریکه بجای هرستاره درتصویر ۱۲ به ترتیب اعداد صحیح ومثبت را منصـــوب می کنیم که اندیس متغیرهائی است که باید مدل را حل کنند.

میله \ یاطاقان	۱	۲	۳	۴	۵
۱	—	—	—	۱	—
۲	۲	۳	۴	—	—
۳	—	—	—	۵	—
۴	—	—	۶	۷	—
۵	—	—	—	۸	—
۶	۹	—	۱۰	—	۱۱

(تصویر ۱۳)

x_j را به این شکل معرفی می کنیم که اگر $x_j = 1$ جفت شدن شماره‌ء j (j اعداد داخل تصویر ۱۴ می باشد) انجام شود . و اگر $x_j = 0$ جفت شدن j انجام نشود . پس تابع ابژکتیو به شکل زیر خواهد بود :

$$\max: \quad f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}$$

به هر میله فقط با یک یاطاقان جفت شود پس :

برای میله دوم $x_2 + x_3 + x_4 \leq 1$

برای میله چهارم $x_6 + x_7 \leq 1$

برای میله ششم $x_9 + x_{10} + x_{11} \leq 1$

به هر یاطاقان فقط با یک میله جفت شود پس :

برای یاطاقان اول $x_2 + x_9 \leq 1$

برای یاطاقان سوم $x_4 + x_6 + x_{10} \leq 1$

برای یاطاقان چهارم $x_1 + x_5 + x_7 + x_8 \leq 1$

برای هر میله‌ء اول وسوم وپنجم وهمچنین برای یاطاقان دوم وپنجم احتیاج به محدودیتی نیست چون هرکدام فقط یک حالت ممکن میتوانند داشته باشند .
وشرط آخر

$x_j = 0$ و 1 $\qquad j = 1$ و $\ldots$ و 11

۷-۴. مسئله پوشش مجموعه

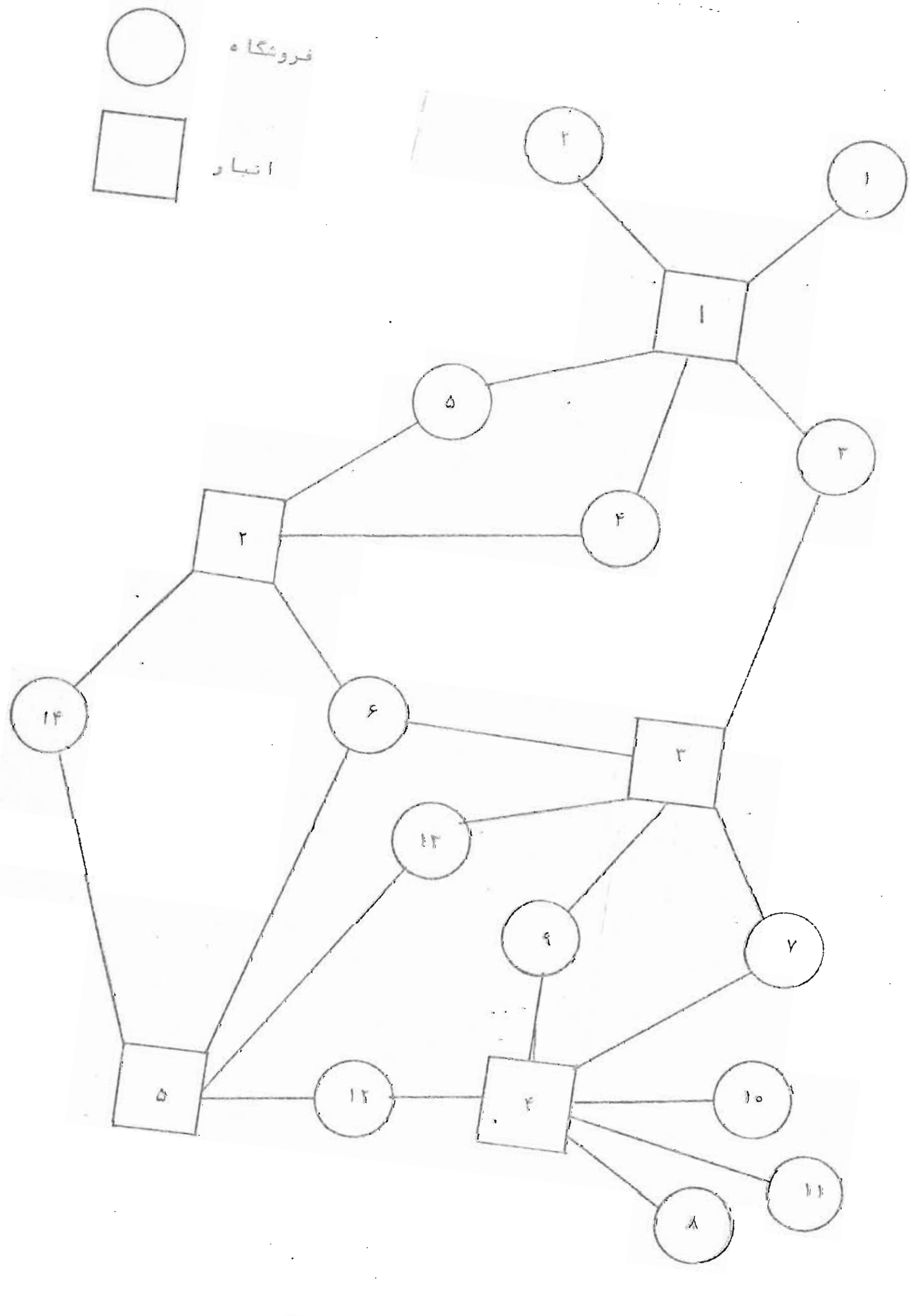
یک بنگاه تولیدی میخواهد تعداد انبارهای خود برای عرضهٔ کالا به فروشگاههایش را حداقل نماید ولی هر انباری نمی تواند به هر فروشگاه کالا بدهد، تصویر ۱۴ نشان دهندهٔ این ارتباطات است.

برای حل این مسئله با روش برنامه ریزی صفر- یک متغیر x_j را بدین شکل معرفی می نمائیم: ۱= x_j انبار j ام مورد استفاده واقع شود و

۰= x_j انبار j ام مورد استفاده واقع نشود. برای حداقل کردن تعداد انبارها تابع ابژکتیو به شکل زیر خواهد بود:

$$\min: \quad f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

برای تعیین اینکه هر ۱۴ فروشگاه از یک انبار کالا دریافت دارند محدودیت های زیر را وارد می کنیم:-

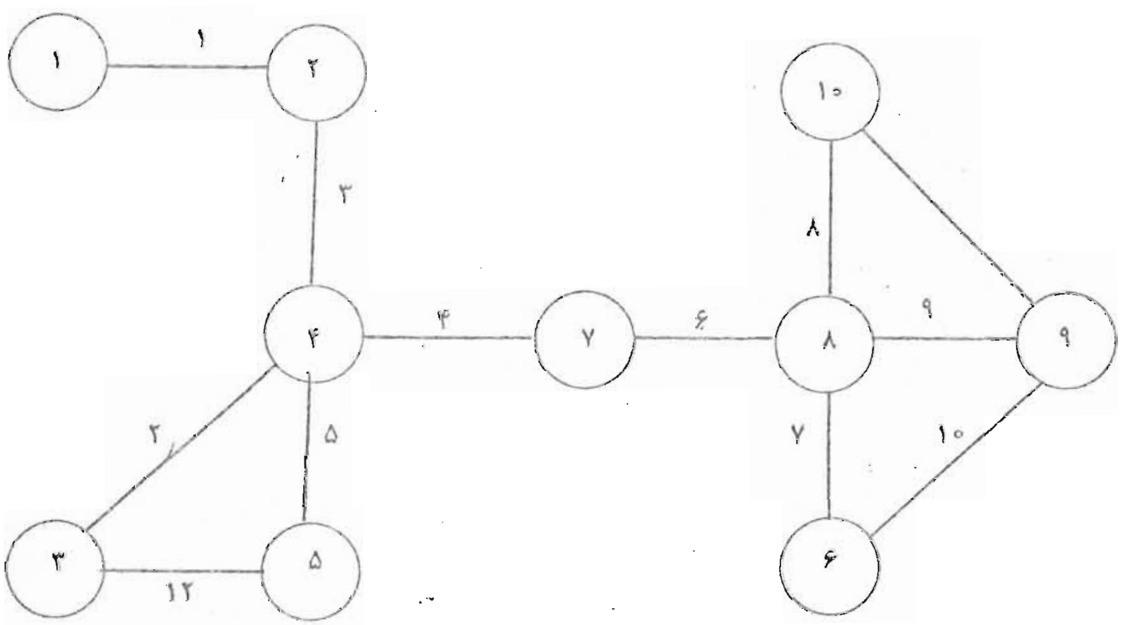


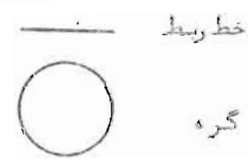
تصویر ۱۴

فروشگاه ۱	$x_1 \geqslant 1$
فروشگاه ۲	$x_1 \geqslant 1$
فروشگاه ۳	$x_1 + x_3 \geqslant 1$
فروشگاه ۴	$x_1 + x_2 \geqslant 1$
فروشگاه ۵	$x_1 + x_2 \geqslant 1$
فروشگاه ۶	$x_2 + x_3 + x_5 \geqslant 1$
فروشگاه ۷	$x_3 + x_4 \geqslant 1$
فروشگاه ۸	$x_4 \geqslant 1$
فروشگاه ۹	$x_3 + x_4 \geqslant 1$
فروشگاه ۱۰	$x_4 \geqslant 1$
فروشگاه ۱۱	$x_4 \geqslant 1$
فروشگاه ۱۲	$x_4 + x_5 \geqslant 1$
فروشگاه ۱۳	$x_3 + x_5 \geqslant 1$
فروشگاه ۱۴	$x_2 + x_5 \geqslant 1$

۸-۴. مسئله پوشش

شبکه تصویر۱۵ رادرنظربگیرید . مسئله انتخاب تعدادی از۱۲ خط رابط است بطوریکه تعدادخطوط رابط طوری حداقل شود که تمام گره‌ها " پوشیده " شوند (بدین معنی که حداقل به‌یک خط ربط متصل باشند).





(تصویر۱۵)

برای فرموله کردن این مسئله متغیر x_j راتعریف می کنیم $x_j = 1$ اگر خط ربط j مورداستفاده واقع شود و $x_j = 0$ اگر خط ربط j مورداستفاده واقع نشود . تابع ابژکتیو ما به‌این شکل خواهدبود :

$$\min: \quad f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12}$$

محدودیتهای لازم برای تحت پوشش قراردادن گره‌ها به‌شکل زیرخواهندبود :

$$x_1 \geq 1 \quad \text{برای پوشش گره ۱}$$

$$x_1 + x_2 \geq 1 \quad \text{برای پوشش گره ۲}$$

$$x_2 + x_{12} \geq 1 \quad \text{برای پوشش گره ۳}$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \quad \text{برای پوشش گره ۴}$$

$$x_5 + x_{12} \geq 1 \quad \text{برای پوشش گره ۵}$$

$$x_7 + x_{10} \geq 1 \quad \text{برای پوشش گره ۶}$$

$$x_4 + x_6 \geq 1 \quad \text{برای پوشش گره ۷}$$

$$x_6 + x_8 + x_9 + x_7 \geq 1 \quad \text{برای پوشش گره ۸}$$

$$x_{11} + x_9 + x_{10} \geq 1 \quad \text{برای پوشش گره ۹}$$

$$x_8 + x_{11} \geq 1 \quad \text{برای پوشش گره ۱۰}$$

۹-۴. مسئله بودجه بندی سرمایه

شاید یک مسئله دربودجه بندی سرمایه شامل فعالیتهای مختلفی مانند مشخص کردن مواردا ستفادهٔ ممکن ازمنابع پولی ، جمع آوری اطلاعات دربارهٔ این موارد همچنین تصمیم گیری درمورداینکه کدام یک ازاین موارد استفاده بالقوه،با منابع محدودوکمیاب شرایط اپتیمم رابدست میدهد.قسمت آخرمسئله یعنی انتخاب پروژه‌ها شباهت زیادی به مسئله کوله‌باردارد.

یکی ازجنبه‌های مشکل بودجه بندی سرمایه ، ارزیابی هزینهٔ سرمایه‌در یک حالت مطلق می باشد ؛ بدین معنی که اگرهیچ منبعی کمیاب نباشد، آیا این پروژه ، پروژهٔ مطلوبی است یاخیر . یکی ازراههای اندازه‌گیری این مطلوبیت روش جریان نقدی تنزیل شده میباشد . این روش ، ارزش فعلی

هرعضو جریان نقدی راپیدامی کند (مثبت برای دریافت ومنفی برای هزینه) وسپس مجموع این ارزشهای فعلی راباهمحساب نموده که آنراارزش فعلی خالص نام می گذارد (NPV) . اگر NPV مثبت باشد ، پروژهٔ مزبور مطلوب است واگرمنفی باشد نامطلوب خواهدبود . NPV مثبت نشاندهندهٔ سودمند بودن مطلق پروژه میباشد ومتاٴسفانه ، غالبا" غیرممکن است که پروژه‌هائی با NPV مثبت انتخاب شوند چون مسائل سهمیه بندی سرمایه وهمچنین محدودیت سایرمنابع اجازه آن رانمی دهد*.

برای روشن شدن چگونگی فرموله کردن چنین مسائلی به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال ۱

مدیریک بنگاه‌تولیدی‌مشغول بررسی پروژه‌هائی درموردبهبودکارخانه خودوگسترش‌آن می باشد . تمام این پروژه‌ها باید ظرف مدت‌دوسال تمام شوند . اطلاعات‌لازم برای پروژه‌های وی درتصویر۱۶ آورده شده‌اند.ازطرفی محدودیت منابع برای این بنگاه تولیدی ازقرارذیل است :

هزینه‌های سال اول :	۴۵۰ واحدپولی
هزینه‌های سال دوم :	۴۲۰ واحدپولی
کارافرادفنی به‌ساعت :	۱۱۰۰۰ ساعت .

---

* برای اطلاعات بیشترراجع به ارزش‌فعلی سرمایه ومحاسبهٔ NPV (net present value) و PV (present value) به‌متون علوم مدیریت واقتصادمراجعه شود .

شماره پروژه	توضیح	هزینه سال اول	هزینه سال دوم	NPV	کارافرادفنی ساعت
۱	بهبودخط تولید	۳۰۰	۰	۱۰۰	۴۰۰۰
۲	ساختن خط جدید تولید	۱۰۰	۳۰۰	۱۵۰	۷۰۰۰
۳	کنترل عددی برای خط تولید جدید	۰	۲۰۰	۳۵	۲۰۰۰
۴	بهبودتعمیرگاهها	۵۰	۱۰۰	۷۵	۶۰۰۰
۵	ساختن کارخانه پرورش موادخام	۵۰	۳۰۰	۱۲۵	۳۰۰۰
۶	خریدکارخانه پرورش موادخام	۲۰۰	۰	۶۰	۶۰۰
۷	خریدتسهیلات جدیدتخلیه کامیونها	۷۰	۱۰	۳۰	۰

(تصویر ۱۶)

برای فرموله کردن این مسئله متغیر x_j را تعریف می کنیم $x_j = 0$ اگرپروژه j اجرانشود $x_j = 1$ اگرپروژه j اجراشود . تابع ابژکتیو مسئله به شکل زیرخواهدبود :

$$\max: \quad f = 100x_1 + 150x_2 + 35x_3 + 75x_4 + 125x_5 + 60x_6 + 30x_7$$

محدودیت هزینه سال اول :

$$g_1 = 300x_1 + 100x_2 + 0x_3 + 50x_4 + 50x_5 + 200x_6 + 70x_7 \leq 450$$

محدودیت هزینه سال دوم:

$$g_2 = 0x_1 + 300x_2 + 200x_3 + 100x_4 + 300x_5 + 0x_6$$

$$+ 10x_7 \leqslant 420$$

محدودیت افراد فنی:

$$g_3 = 4000x_1 + 7000x_2 + 2000x_3 + 6000x_4 + 3000x_5$$

$$500x_6 + 0x_7 \leqslant 11000$$

باید یکی از دو پروژهٔ یک یا دو انتخاب شوند پس:

$$g_4 = x_1 + x_2 = 1$$

پروژهٔ ۳ درصورتی باید اجرا شود که پروژهٔ ۲ اجرا شده باشد پس:

$$g_5 = x_2 - x_3 \geqslant 0$$

پروژه‌های ۵ و ۶ دلخواه و انتخابی میباشد ومیتوان آنها را اجرا نکرد پس:

$$g_6 = x_5 + x_6 \leqslant 1$$

وبالاخره شرط دودوئی بودن x_j :

x_j =۱ و۰ $\qquad$ j =۱و۰۰۰و۷

مثال ۲.

بنگاه تولیدی را درنظر بگیرید که برای اجرای برنامه تولیدی خود باید ۲ طرح را اجرا نماید . درمیان هرکدام از این طرحها پروژه‌هایی وجود دارد که

درهرطرح بایدیک پروژه انتخاب شود.طرح اول مربوط به تولیدقطعات می باشد طرح دوم مربوط به سرهم کردن قطعات وطرح سوم انبارکردن آنها می باشد.افق زمانی برنامهٔ تولیدی وی پنجسال بوده وخصوصیات پروژه‌های وی درجـــدول تصویر ۱۸ نمایان است. این بنگاه تولیدی میخواهد۳ تاازاین پروژه‌هـــا را طوری انتخاب کند که ارزش‌فعلی خالص‌کل درآمد موردانتظاربنگاه حداکثـر گردد. ازطرفی تعدادکارکنان بیش‌از ۱۰۰ نفرنشودومیزان سرمایه‌گذاری درپنج سال موردنظر ازشرایط زیرتجاوزنکند .

حداکثرسرمایه‌گذاری	سال
۷۰	۱
۳۰	۲
۱۵	۳
۱۵	۴
۱۵	۵

(تصویر ۱۷)

طرح	پروژه	توضیح	NPV	اشتغال لازم	میزان سرمایه‌گذاری سال ۱	سال ۲	سال ۳	سال ۴	سال ۵
طرح ۱	۱	بستن قرارداد برای تولید قطعات	۷۵۷	۷	۵	۵	۵	۵	۲
	۲	تولیدقطعات با استفاده‌از تسهیلات موجود	۸۲۵	۳۵	۱۵	۱۲	۴	۴	۴
	۳	تولیدقطعات درتسهیلات جدید	۹۸۷	۲۰	۳۰	۲	۰	۰	۸
طرح ۲	۴	بستن قرارداد برای سرهم‌کردن قطعات	۳۵۰	۱۲	۱۰	۱۰	۱۰	۶	۳
	۵	سرهم‌کردن‌قطعات با استفاده‌از تسهیلات موجود	۵۹۶	۶۵	۷	۴	۴	۴	۴
	۶	سرهم‌کردن قطعات درتسهیلات جدید	۶۵۰	۶۰	۱۵	۲	۲	۲	۲
طرح ۳	۷	انبارکردن تولیدات در انبارهای موجود	۱۴۲۰	۲۰	۵۰	۱۰	۰	۰	۰
	۸	انبارکردن تولیدات درانبارهای کرایه‌ای							

(تصویر ۱۸) .

این مسئله رادردوقسمت فرموله می کنیم که شرایط مطمئن ونا مطمئن باشد :

درشرایط اطمینان

متغیر x_i رابه‌شکل زیرتعریف می کنیم:

$$x_i = \begin{cases} ۱ & \text{اگرپروژه } i \text{ ام انتخاب شود} \\ ۰ & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

شکل تابع ابژکتیوازقرارذیل خواهدبود:

$$\max: \quad 757x_1 + 825x_2 + 987x_3 + 350x_4 + 596x_5 + 650x_6 + 1420x_7 + 1425x_8$$

محدودیتهای مدل بشکل زیرخواهندبود. محدودیت زیرتأمین کننده شرایط اشتغال نیروی کارمی باشد:

$$7x_1 + 35x_2 + 20x_3 + 12x_4 + 65x_5 + 60x_6 + 20x_7 + 5x_8 \leqslant 100$$

محدودیت جدول تصویر ۱۷ درشکل نامعادله‌های زیرخلاصه شده‌است

$$5x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 10x_4 + 7x_5 + 15x_6 + 50x_7 + 7x_8 \leqslant 70$$

$$5x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 10x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 10x_7 + 7x_8 \leqslant 30$$

$$5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 10x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 5x_7 + 7x_8 \leqslant 15$$

$$5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 6x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 5x_7 + 7x_8 \leqslant 15$$

$$2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 0x_7 + 7x_8 \leqslant 15$$

محدودیت زیریکی ازپروژه‌های طرح اول راانتخاب می نماید.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

محدودیت زیرنیز یکی ازپروژه‌های طرح سوم راانتخاب می نماید

$$x_7 + x_8 = 1$$

محدودیت زیرنیزاجازه انتخاب فقط یکی ازپروژه‌های طرح دوم رامی‌دهد

$$x_4 + x_5 + x_6 = 1$$

اگراین فرض رااضافه کنیم که کسی که طرف قرارداد این بنگاه تولیدی باشدتولیدقطعات رابدون اینکه آنها راسرهم کند بعهده می گیرد ولی اگربخواهدآنها راسرهم کند حتما" باید خودش آنها راتولیدنماید. پس این محدودیت لازم است :

$$x_1 - x_4 \geqslant 0$$

درمحدودیت فوق اگر $x_4 = 1$ شود باید حتما" $x_1 = 1$ شود پس طرف قرارداد هم تولیدکننده وهم سرهم کننده خواهدبود ولی اگر $x_4 = 1$ شود ، $x_1 = 0$ نمیتواند باشد بدین معنی که اگرطرف قرارداد پروژه یک راانجام ندهد پروژه ۴ رانمیتواندقبول کند حال اگر $x_4 = 0$ شود $x_1 = 0$ بدین معنی که هیچ کدام ازپروژه‌ها توسط طرف قراردادانجام نمیشود واگر $x_4 = 0$ و $x_1 = 1$ شود ، طرف قراردادفقط پروژه یک راانجام میدهد .

محدودیت آخرکه بایداضافه گردد شرط دودوئی بودن متغیرها است :

$$x_j = 1, 0 \qquad j = 1, \ldots, 8$$

<u>درشرایط بی اطمینانی</u>

درشرایط اطمینان فرض شده بودکه میزان سرمایه‌گذاری سالانه وارزش فعلی خالص مقادیرمعین ومطمئن می باشند . حال دراین حالت این شرایط رانقض می کنیم . فرض کنید سرمایه‌گذاری سالانه وارزش فعلی خالص (NPV)

متغیرهای تصادفی می باشند که‌دارای میانگین (امیدریاضی)وواریانس پیش‌بینی شده هستند . مقادیری که درجدول تصویر۱۷ آورده شده‌اندبعنوان امیدریاضی حداکثرسرمایه‌گذاری درسالهای مختلف درنظرگرفته‌شده‌اند . متغیرهای زیرراتعریف می کنیم :

$E(NPV)_i \doteq$ امیدریاضی ارزش‌فعلی خالص‌پروژه. i ام

$V(NPV)_i =$ واریانس ارزش‌فعلی خالص‌پروژهٔ i ام

فرض می کنیم که تابع مطلوبیت (Utiliy function) این بنگاه کوادراتیک (quadratic) باشد . پس‌این بنگاه تولیدی بایدمطلوبیت خودرا باتوجه به محدودیتهایی که دارد حداکثرکند بدین ترتیب :

$$\max: E(NPV) - A \left\{ [E(NPV)]^2 + V(NPV) \right\}$$

که مقدار A برابر است‌باضریب‌بیزاری اززیسک برای بنگاه تولیدی. تابع فوق را میتوانیم تبدیل به‌جمله‌ای ازامیدهای ریاضی ، واریانس‌ها و کواریانسهای ارزش‌فعلی خالص‌هرکدام ازپروژه‌هابسط دهیم :

$$\max: \sum_{i=1}^{8} x_i \, E(NPV)_i - A \left[\sum_{i=1}^{8} x_i \, E(NPV)_i \right]^2$$

$$-A \left[\sum_{i=1}^{8} x_i x_j \, C(NPV)_{i,j} \right]$$

که

$$C(NPV)_{i,j} = \begin{cases} V(NPV)_i & \text{،} \quad i=j \text{ اگر} \\ \text{کواریانس ارزش‌فعلی خالص‌پروژه‌های } i \text{ ام‌و } j \text{ ام.} & i \neq j \text{ اگر} \end{cases}$$

و

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{اگرپروژهٔ } j \text{ ام انتخاب شود} \\ 0 & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

توجه کنیدتابع ابژکتیو فوق طوری بیان شده که‌اگرپروژه i ام‌ردشود پروژه j دیگراثری درتابع ابژکتیو نخواهدداشت. ازطرفی اگر $i = j$ باشد هیچ کواریانسی در رابطه‌باپروژهٔ iام همراه نخواهدشدوهمچنین اگر پروژهٔ j ام ردشدوهیچ کواریانسی باپروژهٔ iام همراه‌نخواهدشد.

پیش‌بینی واریانسها وکواریانسها برای ارزش‌فعلی خالص‌درجدول تصویر ۱۹ آورده‌شده‌اند.

شماره پروژه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۱	۲۵۰۰	۰	۰	۱۸۰۰	-۲۱۰۰	-۳۳۰۰	-۶۰۰	-۹۹۰
۲	۰	۶۴۰۰	۰	-۲۹۰۰	۳۴۰۰	۴۸۰۰	۹۶۰	۲۰۰۰
۳	۰	۰	۱۲۰۰۰	-۳۹۶۰	۶۵۰۰	۱۰۰۰۰	۱۲۰۰	۳۰۰۰
۴	۱۸۰۰	-۲۸۰۰	-۳۹۶۰	۳۶۰۰	۰	۰	-۸۰۰	-۱۰۰۰
۵	-۲۱۰۰	۳۴۰۰	۶۵۰۰	۰	۴۹۰۰	۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰
۶	-۳۳۰۰	۴۸۰۰	۱۰۰۰۰	۰	۰	۱۴۰۰۰	۱۲۰۰	۳۰۰۰
۷	-۶۰۰	۹۶۰	۱۲۰۰	-۸۰۰	۱۰۰۰	۱۲۰۰	۴۰۰	۰
۸	-۹۹۰	۲۵۰۰	۳۰۰۰	-۱۰۰۰	۱۵۰۰	۳۰۰۰	۰	۱۰۰۰

(تصویر ۱۹)

ارقام مذکوردرجدول فوق به‌ترتیب زیرمی باشند که‌اگرجدول فوق را یک ماتریس ۸×۸ درنظربگیرید عناصر قطراصلی آن برابربا $C(NPV)_{i,j}=V(NPV)_{i,j}$ بطوریکه $i = j$ میباشد وعناصر غیرقطراصلی آن برابربا $C(NPV)_{i,j}$ هستند بطوریکه $i \neq j$ میباشد .

تابع ابژکتیواین مسئله بابکارگیری جدول تصویر ۱۹ به‌شکل زیرخواهد بود :

جمله‌اول

$$\max: 757x_1 + 825x_2 + 987x_3 + 350x_4 + 596x_5 + 650x_6 + 1420x_7 + 1425x_8$$

جمله‌دوم

$$-A\,[\,757x_1 + 825x_2 + 987x_3 + 350x_4 + 596x_5 + 650x_6 + 1420x_7 + 1425x_8\,]^2$$

جمله سوم

$$-A\,[\,2500x_1^2 + 1800x_1x_4 - 2100x_1x_5 - 3300x_1x_6 - 600x_1x_7 - 990x_1x_8 + 6400x_2^2 - 2900x_2x_4 + 3400x_2x_5 + 4800x_2x_6 + 960x_2x_7 + 2000x_2x_8 + 1200x_3^2 - 3960x_3x_4 + 6500x_3x_5 + 10000x_3x_6 + 1200x_3x_7 + 3000x_3x_8 + 1800x_4x_1$$

$$- 2800x_4x_2 - 3960x_4x_3 + 3600x_4^2 - 800x_4x_7 - 1000x_4x_8$$

$$-2100x_5x_1 + 3400x_5x_2 + 6500x_5x_3 + 4900x_5^2 + 1000x_5x_7$$

$$+ 1500x_5x_8 - 3300x_6x_1 + 4800x_6x_2 + 10000x_6x_3 + 1400x_6{}^2$$

$$+ 1200x_6x_7 + 3000x_6^2 - 600x_7x_1 + 960x_7x_2 + 1200x_7x_3$$

$$- 800x_7x_4 + 1000x_7x_5 + 1200x_7x_6 + 400x_7{}^2 - 990x_8x_1$$

$$4500x_8x_2 + 3000x_8x_3 - 1000x_8x_4 + 1500x_8x_5 + 3000x_8x_6$$

$$+ 1000x_8^2 \Big]$$

محدودیتهای این مدل همان محدودیت‌هایی است که درشرایط اطمینان آورده شده‌اند.

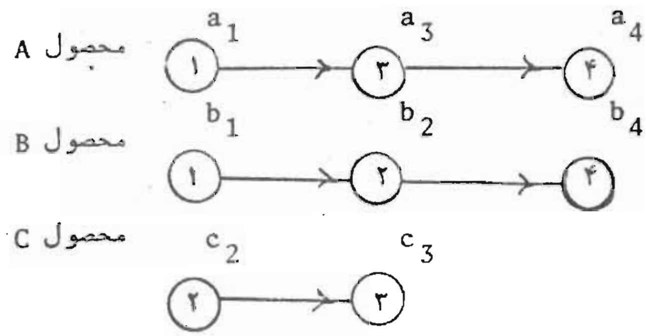
۴-۱۰. مسئله ردیف کردن

فرض کنید تعدادی کار باید در یک زمان توسط یک تعداد ماشین انجام شوند. هر کار زمان انجام معینی دارد. مسئله ما حداقل کردن هزینه تاخیر کارها میباشد. بعنوان مثال یک ماشین نویس را درنظر بگیرید که باید ده نامه را تایپ نماید. تایپ هر نامه حدود یک ساعت وقت می برد. فرض کنید هر نامه سررسید زمانی معینی داشته باشد (مثلا" ۳ ساعت از حالا، یک ساعت

ازحالاوغیره) وهمچنین هزینهٔ جریمه تاٴخیرهرنامه معین میباشد (مثـــــلاً ۵ واحدپولی درهرساعت ، سه واحدپولی درهرساعت وغیره) . حال سئوال این است چگونه نامه‌ها باید ردیف شوند که هزینهٔ تاٴخیرتایپ آنها حداقل گردد .برای فرموله‌کردن این گونه مسائل مثالهائی درزیرآورده شده‌اند .

مثال ۱

سه محصول A و B و C بایدتوسط چهاردستگاه تولیدشوند . شرایط ترتیب تولیدآنها ازلحاظ تکنولوژی موجود وزمانی که‌هرکدام ازآنها درهـــر دستگاه زمان می برند درتصویر۲۰ آورده شده‌است .



(تصویر ۲۰)

به‌عبارت دیگرمحصول A برروی دستگاه ۱ a_1 ساعت ، بروی دستگـــــاه ۳ a_3 ساعت وبروی دستگاه ۴ a_4 ساعت زمان می برد . وهمینطورB b_1 است روی دستگاه ۱، b_2 ساعت روی دستگاه ۲ و b_4 ساعت روی دستگاه ۴ زمان صـرف می نمایدواین مقادیربرای تولید محصول C ، c_2 ساعت برروی دستگاه ۲و c_3 ساعت برروی دستگاه ۳ میباشد . هردستگاه درهرزمان فقط میتواندبروی یک محصول کارکند . بعلاوه خواسته شده‌است تکمیل محصول B بیش‌از d ساعت بطول نیانجامد. مسئله این استکه ترتیبی برای تولیدمحصولات A و B و C پیداکنیدکه‌باتوجه به شرایط فوق حداقل زمان راببرد.

برای فرموله کردن این مسئله متغیرهای زیررا بدین صورت تعریـــف می کنیم : x_{Aj} و ۴و۳و۱= j مشخص‌کننده‌ٔ زمان است موقعیکه تولیـــد محصول A درماشین j شروع میشود (برحسب ساعت ازمبداء زمانی صفـــر) و همینطور x_{Bj} و۴و۲و۱ = j و x_{cj} برای ۳ و۲ = j رانیزتعریف می نمائیم.

محدودیتهای زیرترتیب لازم ناشی ازتکنولوژی موجودرا به مدل تحمیـــل می نماید . برای محصول A مراحل تولیداول توسط دستگاه ۱ انجام میشودو سپس دستگاه ۳ وبعدازآن دستگاه ۴ آنرا تکمیل می نماید پس :

$$x_{A1} + a_1 \leqslant x_{A3}$$

$$x_{A3} + a3 \leqslant x_{A4}$$

همینطوربرای محصولات B و C :

$$x_{B1} + b_1 \leqslant x_{B2}$$

$$x_{B2} + b_2 \leqslant x_{B4}$$

$$x_{c2} + c_2 \leqslant x_{c3}$$

هردستگاه درهرزمان فقط میتواندبرای تولیدیک محصول بکارگرفتـــه شودبرای مثال ، دستگاه ۱ یابایدمحصول B راتولید کند ویا محصول A را (در یک زمان معین) . به عبارت دیگربایدمحصول A قبل از B دردستگاه ۱تولید شودیابلعکس . بااستفاده ازمحدودیتهای "یااین / یاآن" میتوانیم ایـــن محدودیت راواردمدل نمائیم . پس اول محدودیتهای زیررا می نویسیم :

$$x_{A1} + a_1 \leqslant x_{B1}$$

$$x_{B1} + b_1 \leqslant x_{A1}$$

حال محدودیت‌های فوق را با استفاده ازمحدودیتهای یا این/یا آن به‌شکل زیر درمی آوریم :

$$x_{A1} + a_1 - x_{B1} \leqslant My_1$$

$$x_{B1} + b_1 - x_{A1} \leqslant M(1-y_1)$$

$$y_1 = 0,1$$

عددخیلی بزرگ مثبت = M

درمحدودیتهای مذکوروقتی $y_1=1$ میباشد محدودیت اول به شکل زیرتبدیل میگردد:

$$x_{A1} + a_1 - x_{B1} \leqslant M$$

وعملا" تاءثیری درمدل نمی‌گذارد . درصورتی که محدودیت دوم به‌شکل :

$$x_{B1} + b_1 - x_{A1} \leqslant 0$$

تبدیل میگردد وبیانگراین استکه تکمیل مراحل تولیدمحصول B قبل ازمحصول A توسط دستگاه ۱ تولیدشود . ازطرف‌دیگرزمانیکه $y_1=0$ محدودیت اول بیانگر تولیدA قبل از B توسط دستگاه ۱ می‌باشد ومحدودیت دوم غیرفعال میگردد :

به‌همین ترتیب برای دستگاههای ۲ و۳ و۴ محدودیتهای زیررا وارد می کنیم :

$$x_{B2} + b_2 - x_{C2} \leqslant My_2$$

$$x_{C2} + c_2 - x_{B2} \leqslant M(1-y_2)$$

$$x_{A3} + a_3 - x_{C3} < My_3$$

$$x_{C3} + c_3 - x_{A3} \leqslant M(1-y_3)$$

$$x_{A4} + a_4 - x_{B4} \leqslant My_4$$

$$x_{B4} + b_4 - x_{A4} \leqslant M(1-y_4)$$

$$y_2 = 0,1$$

$$y_3 = 0,1$$

$$y_4 = 0,1$$

محدودیت زمانی برای محصول B به شکل زیرمی باشد:

$$x_{B4} + b_4 \leqslant d$$

برای نوشتن تابع ابژکتیو، باید اینکات را درنظربگیریم که محصول A باید درزمان $x_{A4} + a_4$ تکمیل شود ومحصول B درزمان $x_{B4} + b_4$ ومحصول C درزمان $x_{C3}+c_3$. اگر Z بیانگر زمانی باشد که تمام سه محصول تولیدشده باشند تابع ابژکتیوبه شکل زیرخواهدبود:

$$\min: Z = \max(x_{A4} + a_4 \ , \ x_{B4} + b_4 \ , \ x_{C3} + c_3)$$

تابع ابژکتیوغیرخطی فوق معادل محدودیتهای زیرخواهدبود

$$Z \geqslant x_{A4} + a_4$$

$$Z \geqslant x_{B4} + b_4$$

$$Z \geqslant x_{C3} + c_3$$

اگرسه محدودیت فوق را وارد مدل کنیم تابع ابژکتیوبه شکل زیرخواهدشد.

$$\min: f = z$$

مثال ۲

جدول تصویر ۲۱ رادرنظربگیرید . این جدول حاوی اطلاعات لازم برای یک مسئله است که درآن ۶ کار باید توسط یک دستگاه انجام شوند. تاریخ سررسیدهرکدام ازکارها (ازحالا)،جریمه دیرکرد وزمان لازم برای انجام هر کدام ازکارها نیزمشخص شده است .

شماره‌کار i	تاریخ سررسید g_i	جریمه دیرکرد p_i	زمان اجرا d_i
۱	۲	۵	۵
۲	۴	۴	۴
۳	۸	۲	۳
۴	۱۲	۱	۵
۵	۱۳	۷	۲
۶	۱۷	۱	۷

(تصویر ۲۱)

مسئله این است که کارهای ۱ تا ۶ راطوری ردیف کنیدکه جریمهٔ دیرکرد حداقل شود . i رابعنوان شماره‌کار و k رابعنوان نوبت انجام کار i ام در رابطه باردیف کارها درنظرمی گیریم . اگرمتغیر $x_{ik}=1$ باشد کار i ام در نوبت k ام انجام میشود واگر $x_{ik}=0$ باشدکار i ام درنوبت kام انجام نمی شود .

هرکارفقط دریک نوبت میتواندانجام شودپس :

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}=1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} = 1$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} = 1$$

$$x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} = 1$$

یا به‌عبارت دیگر:

$$\sum_{k=1}^{6} x_{ik} = ۱ \qquad i = ۱ و ۲ و ... و ۶$$

از طرف دیگر در هر نوبت فقط یک کار میتواند انجام شود پس:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} = 1$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + x_{65} = 1$$

$$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{66} = 1$$

ویا به‌عبارت دیگر:

$$\sum_{i=1}^{6} x_{ik} = ۱ \qquad i = ۱ و ... و ۶$$

درسه محدودیت‌های فوق شرط دودوئی بودن x_{ik} ها را لازم داریم پس:

$$x_{ik} = ۰ و ۱ \qquad i, k = ۱ و ۲ و ... و ۶$$

برای فرموله‌کردن تابع ابژکتیو متغیر T_i بعنوان دورهٔ زمانی که کار i ام تکمیل می شود را تعریف می کنیم . اگر g_i دروهٔ زمانی باشد که سررسید کار i ام می رسد و p_i جریمه دیرکرد برای هرروز تاخیر در کار i ام باشد داریم :

$$T_i > g_i$$

وهمیشه T_i بزرگتر از g_i میباشد .

اگر هزینهٔ تاخیر برای کار i ام را C_i بنامیم

$$C_i = p_i (T_i - g_i)$$

یا بطورکلی :

$$C_i = \begin{cases} p_i (T_i - g_i) & \text{اگر } T_i > g_i \\ 0 & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

تابع ابژکتیو باید مجموع جریمه‌های دیرکرد را حداقل نماید . برای بیان جریمهٔ تاخیر کار i ام احتیاج داریم که مقدار T_i را بدانیم . مسلم است که مقدار T_i بستگی به این دارد که کار i ام در کدام نوبت در ردیف کار قرار می گیرد . کار j ام قبل از کار i ام درهر نوبت k انجام میشود :

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \cdots + x_{ik} = 0 \ , \ x_{jk} = 1$$

راه دیگری برای بیان این شرط به شکل زیر است :

اگر برای هر نوبت k $\quad x_{jk} \ [1 - (x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{ik})] = 1$

کار j ام قبل از کار i ام انجام میشود .ودرغیراینصورت کار j ام قبل از i ام انجام نمیشود. یا به عبارت خلاصه‌تر اگر برای نوبت k

$$x_{jk}(1 - u_{ik}) = 1$$

که

$$u_{ik} = \sum_{q=1}^{k} x_{iq}$$

کار j ام قبل ازکار i ام انجام میشود

برای مثال اگر $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 0$

$$u_{24} = \sum_{q=1}^{4} x_{2q} = 0$$

واگر

$$x_{34}\ (1-u_{24}) = 1$$

کارسوم قبل ازکاردوم انجام میشود.

اگر d_i مدت زمان انجام کار i ام باشد ، باید d_j را بازمان اختصاص داده شده به انجام کارهائی که قبل ازکار i ام انجام میشوند جمع کنیم

جمله u_{ik} درفوق بیانگراین است که کار j ام قبل ازکار i ام با k دوره زمانی انجام میشود.

برای بررسی اینکه کار j ام درهردوره قبل ازکار i ام می‌آید.تابع زیر راارزیابی می کنیم

$$\sum_{k=1}^{6} x_{jk}\,(1 - u_{ik}) = \begin{cases} 1 & \text{اگر کار j ام قبل ازکار i ام انجام شود} \\ 0 & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

که

$$u_{ik} = \sum_{q=1}^{k} x_{iq}$$

برای مثال فرض کنیدکه ۶ کاربه‌ترتیب زیرردیف شده‌اند:

۱
۲
۳
۴
۵
۶

فرض کنید که $j=3$ و $i=5$ ؛ پس $x_{32}=1$ وتمام x_{3k} های باقی مساوی صفرهستند . وهمچنین $x_{54}=1$ وباقی x_{5k} ها مساوی صفرهستند . تابع فوق به شکل زیرخواهدگردید :

$$\sum_{k=1}^{6} x_{jk}\ (1-u_{ik}) = \sum_{k=1}^{6} x_{3k}\ (1-u_{5k})$$

$$= x_{31}[\ 1-\ (x_{51}\ )]$$

$$+\ x_{32}[\ 1-\ (x_{51}+x_{52})\ ]$$

$$+\ x_{33}[\ 1-\ (x_{51}+x_{52}+x_{53})\ ]$$

$$+\ x_{34}[\ 1-\ (x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54})]$$

$$+\ x_{35}[\ 1-\ (x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}\ )\ ]$$

$$+\ x_{36}[\ 1-\ (\ x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56})\ ]$$

$$=1$$

اگربلعکس $j=5$ و $i=3$ باشد جملهٔ فوق به شکل زیرتبدیل خواهدشد :

$$\sum_{k=1}^{6} x_{jk} \left(1- u_{ik} \right) = \sum_{k=1}^{6} x_{5k} \left(1-u_{3k} \right)$$

$$= x_{51} \left[1- (x_{31}) \right]$$

$$+ x_{52} \left[1- (x_{31} + x_{32}) \right]$$

$$=0$$

اگر d_j زمان انجام کار j ام باشد، حاصل ضرب زیربرابرخواهدبودبا آن قسمت از T_i که به انجام کار j ام (قبل از i) نسبت داده شده است.

$$d_j \sum_{k=1}^{6} x_{jk} \quad (1-u_{ik})$$

اگر j قبل از i انجام نشود عبارت فوق مساوی صفر می گردد. اگر عبارت فوق را برای تمام j ها جمع کنیم حاصل زمان اجرا برای تمام کارهائی که قبل از i انجام میشوند را به ما خواهد داد. وهمچنین اگر d_i را به آن اضافه نمائیم T_i را بدست خواهیم آورد که برابراست با مدت زمانی که کار i ام تکمیل می شود:

$$T_i = d_i + \sum_{j=1}^{6} d_j \left[\sum_{k=1}^{6} x_{jk} \left(1- u_{ik} \right) \right]$$

که

$$u_{ik} = \sum_{q=1}^{k} x_{iq}$$

باداشتن T_i میتوانیم c_i را بطورصریح بیان کنیم وتابع ابزکتیو به شکل زیرخواهد بود

$$\min \quad f= \sum_{i=1}^{6} c_i = \sum_{i=1}^{6} p_i(T_i - g_i)$$

و یا

$$\min: f=\sum_{i=1}^{6} pi \left\{ di + \sum_{j=1}^{6} d_j \left[\sum_{k=1}^{6} x_{jk} \left(1- \sum_{q=1}^{k} x_{iq} \right) \right] - g_i \right\}$$

این مسئله دارای ۴۰۲ متغیر و ۳۸۴ محدودیت میشود .

مثال ۳

درمثال قبل هرنوبت که کار i در آن می بایست انجام میشد را به عنوان متغیر کنترل درنظرگرفتیم حال شرایط مسئلهٔ قبل راکمی تغییرمیدهیم .دراین حالت به جای نوبت ها دوره های زمانی راهرکار را بدتکمیل شود را متغیرکنترل درنظرمیگیریم . واضح است که دوره های زمانی مابیشتر از تعداد نوبت های مثال قبل می شود .

متغیر x_{it} راتعریف می کنیم : $x_{it}=1$ اگرکار i درزمان t انجام شود ودرغیراینصورت $x_{it}=0$ برای هرکار دوتابع پله‌ای تعریف میکنیم پس برای کار i ام :

$$b_{it} = \begin{cases} 1 & \text{اگر کار } i \text{ ام درزمان } t \text{ ام انجام شود} \\ 0 & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

وهمچنین ;

$$x_{it} = \begin{cases} 1 & \text{اگرکار } i \text{ ام باشروع دوره زمانی } t \text{ ام تکمیل می شود} \\ 0 & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

بدین ترتیب با مراجعه به جدول تصویر ۲۱ فرض کنید که ردیف جدول تصویر ۲۲ را بکار گرفته‌ایم .

زمان خاتمه	زمان شروع	مدت انجام کار	شماره کار
۴	۱	۴	۲
۹	۵	۵	۱
۱۲	۱۰	۳	۳
۱۷	۱۳	۵	۴
۲۴	۱۸	۷	۶
۲۶	۲۵	۲	۵

(تصویر ۲۲)

بطورمثال برای کارسوم داریم :

$$b_{31} = 0$$

$$b_{32} = 0$$

$$\vdots$$

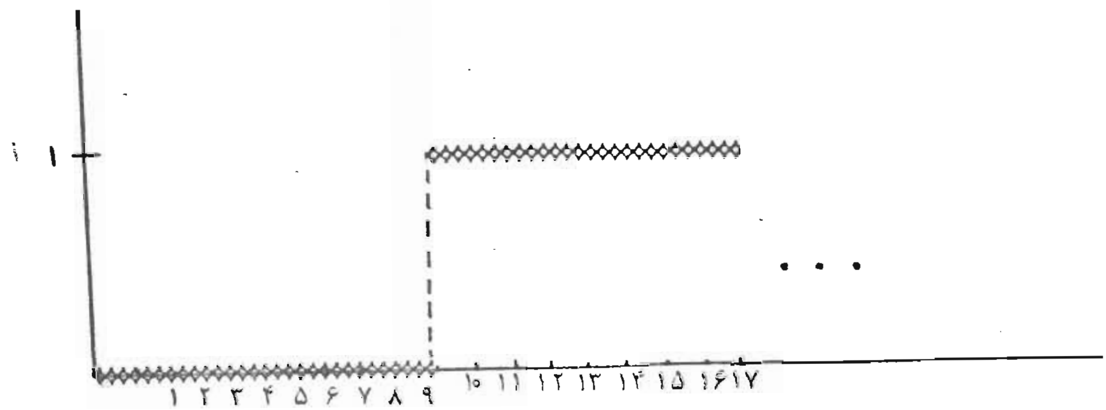
$$b_{39} = 0$$

$$b_{3,10} = 0$$

$$b_{3,11} = 1$$

$$\vdots$$

همانطورکه درتصویر ۲۳ نشان داده‌شده‌است .



تصویر ۲۳

وهمینطور:

$x_{31} = 0$

$x_{32} = 0$

$\vdots$

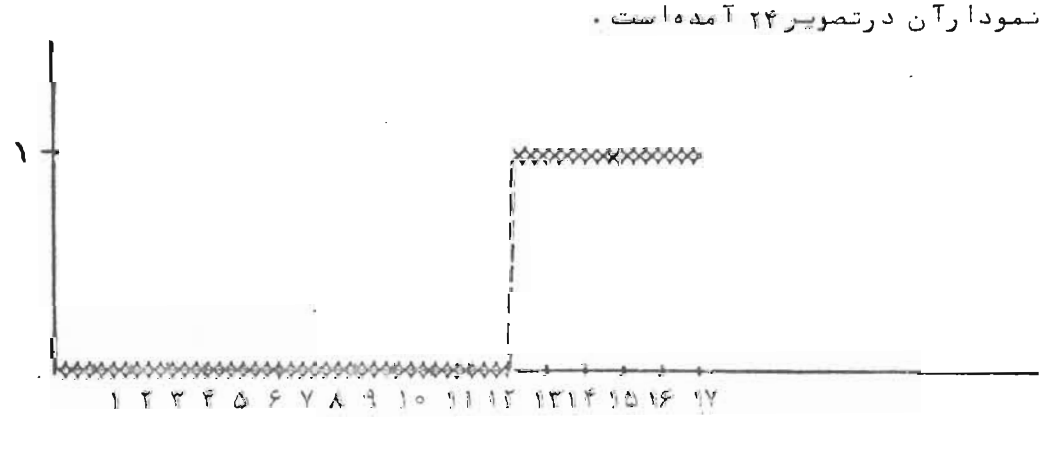
$x_{3,12} = 0$

$x_{3,13} = 1$

$x_{3,14} = 1$

$\vdots$

که نمودارآن درتصویر۲۴ آمده است.



تصویر ۲۴

باتوجه به‌تعاریفی که‌از b_{it} و x_{it} کردیم جمله‌ٔ زیربرای هرکار درزمان t قابل قبول میباشد:

$$b_{it} - x_{it} = \begin{cases} ۱ & \text{اگرکار } i \text{ دردورهٔ } t \text{ انجام شود} \\ ۰ & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

چون فقط یکدستگاه بایدتمام کارهاراانجام دهدپس درهرزمان t فقط یک کارمیتواند انجام شود پس محدودیت زیرضروری میباشد:

$$\sum_{i=1}^{6} (b_{it} - x_{it}) = 1 \qquad t = 1,2,\ldots ,T$$

که:

$$T = \sum_{i=1}^{6} d_i = 26$$

حال باید توابع پله‌ای b_{it} و x_{it} رابه‌شکل جبری بیان کنیم. اشکال ارائه‌شده زیرخصوصیات پله‌ای فوق رادارا هستند.

$$b_{it} \leqslant b_{i,t+1}$$

یا

$$b_{it} - b_{i,t+1} \leqslant 0$$

$$t = 1,2,\ldots,T-1$$

$$i = 1,2,\ldots,6$$

و

$$x_{it} \leqslant x_{i,t+1}$$

$$x_{it} - x_{it+1} \leqslant 0$$

یا

$$t = 1,2,\ldots,T-1$$

$$i = 1,2,\ldots,6$$

هرکاریکبار شروع میشود وپروسهٔ تکامل آن تا تمـــــام شدن آن طـــول میکشد پس :

برای تمام i هاو t ها $b_{it} = x_{i,t+d_i}$

ووقتی که $x_{it} \equiv 1$ برای $t > T$

بدین ترتیب درتصاویر ۲۳ و ۲۴ : $b_{3t} = x_{3,t+3}$

با داشتن b_{it} بعنوان تابعی از x_{it} میتوانیم b_{it} رادرمحدوویت انجام هرکاردریک زمان حذف کنیم پس :

$$\sum_{i=1}^{6} (x_{i,t+d_i} - x_{i,t}) = 1$$

$$t = 1,2,\ldots,T$$

دیگربه محدودیت $b_{it} - b_{i,t+1} \leqslant 0$ احتیاجی نداریم چون متغیـــر b_{it} رادیگرلازم نداریم . تنها محدودیتهای مافقط محدودیت فوق ومحدودیت $x_{it} - x_{i,t+1} \leqslant 0$ میباشد .

برای فرموله کردن تابع ابژکتیو، میدانیم که کار i دیرشروع میشود. اگر $x_{it} = 0$ بطوریکه $t > g_i$ و g_i برابر تاریخ سررسید کار i امباشـد. دیرکردکار i ام به شکل زیرخواهدبود :

$$\sum_{t=g_i+1}^{T} (1 - x_{it})$$

بنابراین جریمهٔ دیرکردکار i ام ازقرارزیرخواهدبود :

$$C_i = p_i \sum_{t=g_i+1}^{T} (1 - x_{it})$$

عبارت فوق را بروی i جمع می‌بندیم :

$$\sum_{i=1}^{6} C_i = \sum_{i=1}^{6} p_i \sum_{t=g_i+1}^{T} (1-x_{it})$$

بنابراین تابع ابژکتیو را میتوانیم به شکل زیر تعریف نمائیم :

$$\min: \; f = \sum_{i=1}^{6} p_i \sum_{t=g_i+1}^{T} (1-x_{it})$$

یا بصورت حداکثرکننده تعریف نمائیم :

$$\max: \; f = \sum_{i=1}^{6} p_i \sum_{t=g_i+1}^{T} x_{it}$$

تعدادی از متغیرها را میتوانیم حذف کنیم ، برای مثال ، هیچ کاری نمیتواند درمدت زمان کمتر از آنچه که درستون دوم جدول تصویر ۲۲ آورده شده است طول بکشد . بنابراین برای هر کار i متغیرهای x_{it} که در آنها $t = 1,2, \ldots, d_i$ باشند میتوانند حذف شوند.

برای خصوصیاتی که در این مسئله درنظرگرفتیم مدل فوق شامل ۱۳۰ متغیر و ۱۵۶ محدودیت میشود.

مثال ۴

مثال قبل را درنظر بگیرید . ۲۶ از ۱۵۶ تا محدودیت مذکور مشخص کننده توابع پله‌ای هستند (محدودیتهای $0 \leqslant x_{it} - x_{i,t+1}$) . حال متغیر جدیدی را به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$y_{it} = \begin{cases} 1 & \text{اگر کار } i \text{ در پایان دوره } t \text{ تمام شود} \\ 0 & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

ازآنجائیکه ازاین به‌بعدتابع پله‌ای نداریم ، هیچ محدودیتی ازنـــوع مذکوردرپرانتزفوق موردلزوم نیست . به‌هرحال ، احتیاج به‌محدودیتی داریم که مشخص‌کنـدهرکارفقط وفقط به‌یک زمان تکمیل منصوب‌شود پس :

$$\sum_{t=d_i}^{T} y_{it} = 1 \qquad i=1,2,\dots,6$$

توجه داشته باشیدکه y_{it} و x_{it}- همانطورکه‌درفرمول قبل بکاربرده‌شد به‌هم مرتبط هستند :

$$x_{it} = \sum_{q=d_i}^{t-1} y_{iq}$$

جمله‌ٔ فوق رااگردرمحدودیت زیر (محدودیت انجام هرکاردریک زمان) قـرار دهیم

$$\sum_{i=1}^{6} \left(x_{i,t+d_i} - x_{it}\right) = 1$$

محـــــدودیـت زیربدست می آید :

$$\sum_{i=1}^{6} \left[\sum_{q=d_i}^{t+d_i-1} y_{iq} - \sum_{q=d_i}^{t-1} y_{ig} \right] = 1$$

ویا به‌عبارت دیگر :

$$\sum_{i=1}^{6} \sum_{q=t}^{t+d_i-1} y_{iq} = 1 \qquad t=1,2,\dots,T$$

همچنین باچنین جایگزینی میتوانیم تابع ابژکتیورانیزبدست آوریم :

$$\max f^* = \sum_{i=1}^{6} P_i \sum_{t=g_i+1}^{T} \sum_{q=d_i}^{t-1} y_{iq}$$

بدین ترتیب توانستیم این مسئله را با ۱۳۰ متغیر وفقط ۳۲ محدودیت فرموله کنیم .

۱۱-۴. مسئله طراحی چندین پروژه با منابع محدود

با اینکه روشهای تحلیل شبکه مانند PERT و CPM ابزار برنامه‌ریزی مفیدی هستند ولی درشرایطی مسائل را بررسی می نمایندکه منابع نا محدود میباشند؛ بدین معنی که هروقت پروژه‌های قبل ازپروژهٔ i به‌اتمام رسیدند، پروژه i فورا" میتواندشروع شود . ولی معمولا" منابع محدودمی باشند ومسئله عمومی‌تر ومهم‌تر مشخص‌کردن طرح اپتیمم فعالیتهایی است که‌دریک شبکه‌ای ازفعالیتها وپروژه‌ها به‌همدیگر وابسته‌هستند بطوریکه منابع ، در زمانهای مختلف محدودمی باشند .

میتوان توابع ابژکتیو مختلفی را مناسب بدانیم برای مثال میتوان حداقل کردن زمان اختصاص‌داده شده به یک گروه ازپروژه‌های مرتبط به‌هم را درنظرگرفت ـ به‌عنوان حداقل کردن زمان عملیات تابع ابژکتیودیگرنمیتواند زمانی که‌بین حالاوتکمیل تمام پروژه‌ها قرارمیگیرد راحداقل نماید ـ بعنوان حداقل کردن زمان انجام ویا حداقل کردن کل تاٴخیرویا کل هزینهٔ دیرکرد. توابع ابژکتیودیگررانیزمیتوان درنظرگرفت منجمله حداقل کردن نوسانات اشتغال منابع ویاحداقل کردن میزان بکارگیری منابع درهردوره وازاین قبیل .

برای فرموله کردن این مسئله بایدمتغیرهای زیادی راتعریف‌کنیم :

اندیس مربوط به‌شماره پروژهٔ	$i = 1,2,\dots,I$	i
اندیس مربوط به‌شمارهٔ فعالیت	$j = 1,2,\dots,N_i$	j
اندیس مربوط به‌زمان	$t = 1,2,\dots,G_i$	t
تعدادپروژه‌ها درشبکه		I
تعدادفعالیتها درپروژهٔ i		N_i

فرض میشود که پروژه i یک تاریخ سررسید مطلق وهمچنین یک تاریـــــخ سررسیدمطلوب دارد.

تاریخ سررسیدمطلق برای پروژهٔ i

G_i (پروژهٔ i بایددرزمان Gi یازودترتکمیل شود)

g_i تاریخ سررسیدمطلوب برای پروژهٔ i

(پروژهٔ i دیرانجام نشده اگردرزمان g_i یازودترتکمیل شود)

L_{ij} تاریخ سررسیدمطلق برای فعالیت jام پروژهٔ iام

(دیرترین زمان ممکن کهدرآن فعالیت jاجازهداردتکمیل شود ـ بادرنظرگرفتن محدودیت‌های تقدم فعالیتها)

a_{ij} زمان رسیدن بهانجام فعالیت jام پروژهٔ iام

(بدین معنی کهاگر $a_{23}=4$ باشد شروع انجام فعالیت سوم ازپروژهٔ دوم به زمان ۴ رسیدهاست)

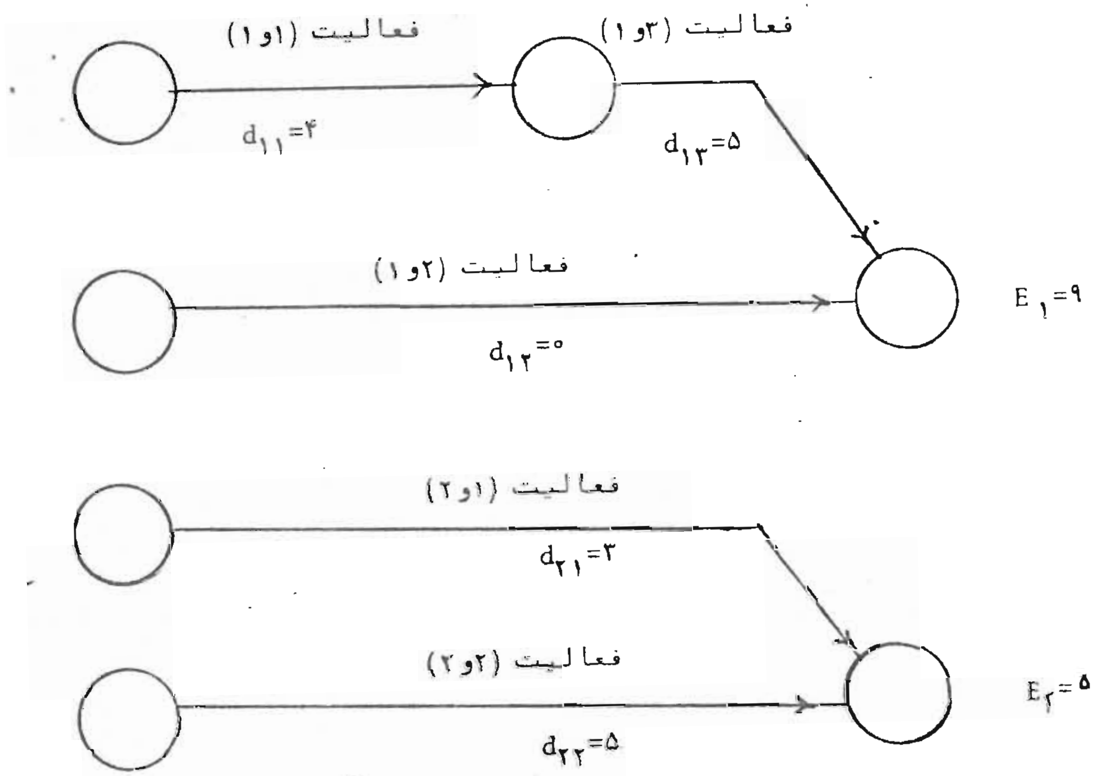
d_{ij} تعداددوره‌های زمانی لازم برای انجام فعالیت jام پروژهٔ iام

E_{ij} زودترین زمان ممکن کهدرآن فعالیت jام ازپروژهٔ iام بادرنظر گرفتن محدودیتهای تقدم فعالیتها ، زمان رسیدن ومدت انجـــــام فعالیت میتواندتکمیل شود .

E_i زودترین زمان ممکن کهدرآن پروژهٔ i بادرنظرگرفتن تقدم فعالیتها ومحدودیت موجودبودن منابع میتواندتکمیل شود. بدین ترتیب اگر پروژهٔ iام بتواندددردورهٔ زمانی ششم تکمیل شود (ولی نهزودتر) $E_i=7$ خواهدبود .

$$x_{it}=\begin{cases}1 & \text{اگرتمام فعالیتهادرپروژه } i \text{ دردورهٔزمانی } t-1 \text{ یازودترتکمیل شود}\\ 0 & \text{درغیراینصورت}\end{cases}$$

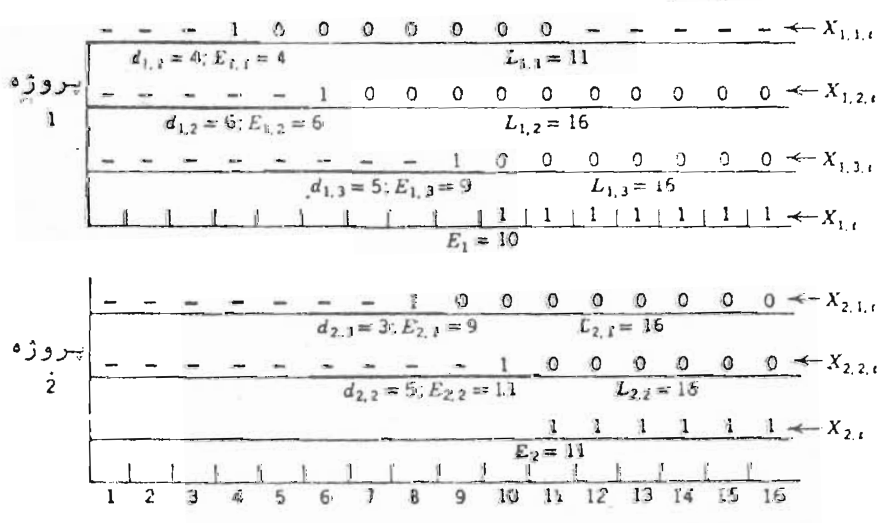
تقدم فعالیتها در شبکه‌ٔ تصویر ۲۶ نشان داده شده است .



تصویر ۲۶

طراحی با منابع نامحدود

فرض کنید منابع نامحدود است و میتوانیم فعالیت را هرچه زودتر شروع کنیم . این وضعیت در تصویر ۲۷ آورده شده است .



" – " نشاندهنده این است که متغیر از قبل مساوی صفر قرار داده شده است .
تصویر ۲۷

درتصویر۲۷ فعالیتهای (۱و۱)و (۲و۱)و (۱و۲)و (۲و۲) همان وقتی کـــــه میرسند شروع میشوند. فعالیت (۳و۱) وقتی شروع میشودکه فعالیت (۱و۱)تکمیل می شود . درمحلهائیکه خط تیره کشیده شده نشان دهنده مقادیرمتغیرهائی است که میتوان آنها رادرنظرنگرفت ویا ازقبل آنها را مساوی صفرقرارداد. به طورمثال درردیف اول تصویر۲۷ x_{111} و x_{112} و x_{113} مساوی صفرمی باشند، چون فعالیت (۱و۱) درهیچکدام ازاین زمانها نمی تواندتکمیل شود.همینطور $x_{11,12}$ و $x_{11,13}$ و .... و $x_{11,16} = 0$ چـــون فعالیت (۱و۱) بایدحداقل ۵ دوره زمانی قبل از $t = 16$ تکمیل شـــود (بعلت وجودرابطه تقدم بین فعالیت (۱و۱) و (۳و۱) توجه کنید کـــه X_{ijt} دارای مقداریک می باشدوآن وقتی است که پروژه i تکمیل می شودوباقـــی جاها $X_{ijt}=0$ است .

طراحی با منابع محدود

حالافرض کنیدکه منابع محدودمی باشند درمسئله ای که باتصاویر۲۵ و ۲۶ ، بیان شده متغیرهای زیررانیزاضافه می کنیم .

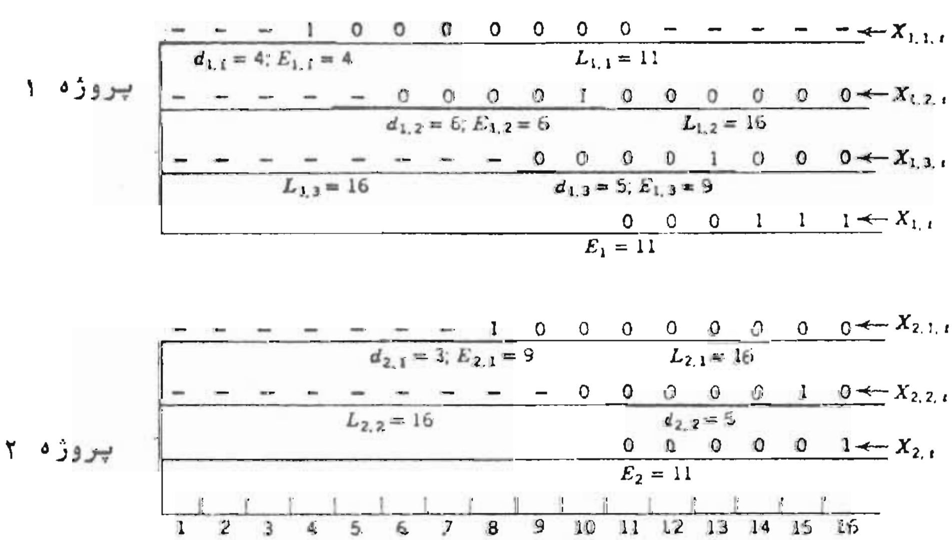
اندیس نشان دهنده شماره منبع $=1,2,...,K$	k
تعدادانواع مختلف منابع موجود	K
تعدادواحدلازم ازمنبع k برای فعالیت j ازپروژه i	r_{ijk}
تعدادواحدمنبع k که درزمان t موجوداست .	R_{kt}

فرض کنید که $K = 2$ بدین معنی که فقط دونوع منبع وجـــــودداردو برای تمام t هاوتمام k ها ، بدین معنی که یک واحدازهردومنبع درسرتاسر ۱۶ دوره زمانی که درآن باید هردوپروژه تکمیل شوندوجودداردو. همچنین فرض کنید که نیازبه منابع برای پنج سال فعالیت (r_{ijk})درجدول تصویر ۲۸ آورده شده است .

$k\downarrow$ \ $(i,j)\rightarrow$	(۱و۱)	(۲و۱)	(۳و۱)	(۱و۲)	(۲و۲)
۱	۱	۱	۰	۰	۱
۲	۱	۰	۱	۱	۰

(تصویر ۲۸)

ازردیف اول جدول تصویر ۲۸ واضح است که فعالیتهای (۱و۱)و(۲و۱) و(۲و۲) دریک زمان نمی توانند انجام شوند چون هرسه آنها احتیاج به یک واحدازمنبع ۱ دارند . وبه همین علت درردیف دوم هم واضح است که فعالیتهای(۱و۱)و (۳و۱) و(۱و۲) نمیتوانند همزمان اجرا شوند . ازطرف دیگرباز فعالیتهای (۱و۱)و(۳و۱) بعلت وجودرابطهء تقدم فعالیتها نمیتوانند دریک زمان اجرا شوند .

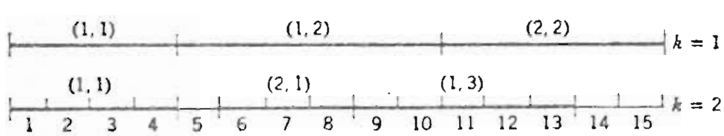


" _ " نشاندهنده این است که متغیرازقبل مساوی صفرقرارداده شده است .

تصویر ۲۹

یک طراحی شدنی برای این مسئله درتصویر ۲۹ آورده شده است . درتصویر ۲۹ بطوردلخواه منابع یک ودورابه فعالیت (۱و۱) اختصاص داده ایم . بعدازچهار دورهٔ زمانی منابع یک ودوآزادشده اندومنبع یک به فعالیت (۲و۱) اختصاص داده شده . بعدازیک دوره زمانی دیگرفعالیت (۱و۲) می رسد ومنبع دورابه آن اختصاص داده ایم . بعدازسه دوره دیگر (۱و۲) تکمیل میشودومنبع ۲دراختیار فعالیت (۲و۱) قرارمیگیرد . وقتی فعالیت (۲و۱) تکمیل می شود. منبع یک آزادمیگردد وبه فعالیت (۲و۲) منصوب می شود .

تصویر ۳۰ را درنظربگیرید منبع ۱ وقتی t =۱۶ هست ومنبع دووقتی t =۵ و t=۱۴ و t =۱۵ است بلااستفاده می ماند.



تصویر ۳۰

همچنین توجه داشته باشید که مقادیر E_1 در تصاویر ۲۹ و ۲۷ متفاوت است ولی مقادیر E_{ij} و L_{ij} تفاوتی نکرده‌اند. زودترین زمانی که پروژه ۱ میتواند کامل شود درحال حاضر برابر است با $E_1=11$ در مقایسه با $E_i=10$ (تصویر ۲۷) یعنی زمانی که فرض شده بود منابع نامحدود میباشند این امر منتج از این مسئله است که فعالیت (۲و۱) نمی‌تواند شروع شود تا فعالیت (۱و۱) تکمیل شود، چون فعالیت (۱و۱) نیاز به همهٔ منابع یک و دو دارد. برای ارزیابی مقادیر متغیرهای E_{ij} و L_{ij} و E_i ، باید یادآور شود که E_{ij} زودترین زمانی است که در آن فعالیت j از پروژهٔ i میتواند تکمیل شود - با درنظرگرفتن محدودیتهای تقدم فعالیتها، و L_{ij} دیرترین زمانی که در آن فعالیت j از پروژهٔ i مجاز است که تکمیل شود - با درنظرگرفتن تاریخ سررسید مطلق پروژه G_i؛ و E_i زودترین زمانی که i میتواند تکمیل شود - با درنظرگرفتن محدودیت تقدم فعالیتها، محدودیت در دسترس بودن منابع باید توجه داشت در ارزیابی E_i ، تمام پروژه‌ها به غیر از پروژهٔ i باید نادیده درنظرگرفته شود تا بتوان تشخیص داد که آیا منابع برای پروژهٔ i صحیح هستند؟

تابع ابژکتیو

همانطور که قبلاً" ملاحظه شد انواع مختلفی از توابع ابژکتیو را برای حل اینگونه مسائل میتوان بکار گرفت. چندتائی از آنها را در اینجا فرموله می کنیم.

حداقل کردن زمان عملیات

به پروژهٔ ۲ در تصویر ۲۹ توجه کنید. کل افق زمانی برنامه‌ریزی ۱۶ دورهٔ زمانی میباشد. زمان عملیات برای پروژهٔ ۲ ، یا دوره‌های زمانی کاری حداقل خواهد شد، اگر تا حد ممکن تعداد کمتری دوره‌های زمانی بعد از E_2 به انجام فعالیتهای پروژهٔ ۲ اختصاص داده شود. به عبارت دیگر، زمان عملیات

حداقل میشود اگرتعداددوره‌های زمانی بعداز E_2راکه‌به‌انجام فعالیتهای پروژهٔ ۲ اختصاص داده نشده‌اندراحداکثرنمائیم . احتیاجی نیست‌که دوره‌های زمانی ۱تا(E_2-1) راملاحظه کنیم ، جون E_2 زودترین دورهٔ زمانی است‌که پروژهٔ ۲ امکان تکمیل شدن رادارد .

برای حداکثرکردن تعداددوره‌های بعداز E_2 که‌به‌انجام فعالیت‌های پروژهٔ ۲ اختصاص‌داده نشده‌است ، تابع زیرراحداکثرمی نمائیم .

$$\max: \quad \sum_{t=E_2}^{16} x_{2t}$$

برای حداقل کردن زمان عملیات‌برای هردوپروژه

$$\max: \quad \sum_{i=1}^{2} \sum_{t=E_i}^{6} x_{it}$$

یابطورکلی تربرای حداقل کردن کل زمان عملیات‌برای یک‌شبکه I پروژه‌بازمان سررسید مطلق G_j میتوانیم بنویسیم

$$\max: \quad \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=E_i}^{G_i} x_{it}$$

درجاهائیکه بیش‌ازیک‌طراحی اپتیمم‌وجوددارد ، ممکن است‌این قاعده بکاربرده شود :

" اگرهرفعالیت‌هرچه زودترشروع شود ، بنابراین زمان عملیات‌همراه باطراحی اپتیمم افزایش‌نخواهدیافت" بدین منظور، ممکن است‌یک‌تابع تابع tx_{ijt} رابه تابع ابژکتیواضافه نمائیم . چنین‌تابعی باید به دوره‌های زمانی وزن بیشتری بدهدتاتاریخ سررسیدمطلق . اگرازتابع

ابژکتیوقبلی جمله‌ٔ

$$\frac{-1}{M}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=E_{ij}}^{L_{1j}-1} t x_{ijt}$$

راکسرکنیم تابع ابژکتیو زیربدست خواهدآمد:

$$\max: \sum_{i=1}^{I}\sum_{t=E_i}^{G} x_{it} - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=E_{ij}}^{L_{ij}-1} t x_{ijt}$$

M بهاین منظورآورده شده که سهم این جمله که درتابع ابژکتیواضافــه گردید کوچکترازهر x_{it}است، بنابراین حداقل کردن زمان عملیات بــازود شروع کردن فعالیت‌هاازبین نخواهدرفت. برای ایجادچنین تضمینی‌احتیــاج به محدودیت‌زیرداریم :

$$M > \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{N_i} L_{ij}$$

حداقل کردن زمان انجام

حداقل کردن زمان عملیات (زمان کاری) ممکن است‌نیازبه‌این داشته باشد که‌فعالیتها برای چنددوره بعدازاینکه‌آنها رسیده‌اندناچیزباشند تــا وقتی که‌منابع بیشتری دردسترس قرارگیرد. بدین ترتیب درتصویر۲۷ که‌منابع نامحدود فرض‌شده‌اند، اگرفعالیتهای (او۱) و(۲و۱) یک‌دوره زمانــــی تاءخیرداشتند ; زمان عملیات‌کاهش‌می‌یافت: درمقابل افزایشی درزمـــان عملیات، ممکن است‌که فعالیتهازودترانجام شوند ودرنتیجه زودترتکمیـل شدن شبکه فعالیتهاوپروژه‌هاراتضمین نماید . اگرتابع ابژکتیو L حداقل کردن زمان بین دوره‌ٔ ۱ وتکمیل شبکه‌ٔ پروژه‌هارادرنظربگیرید، به‌عبــارت

دیگر تابع ابژکتیو درجستجوی حداقل " زمان انجام " (زمانی که تمام پروژه‌ها تکمیل شده‌اند.) باشد. برای حصول این هدف بسادگی برای پروژه‌ای که بزرگترین E_i را دارد زمان بین E_i و G_i را حداقل می کنیم .

$$\max: \sum_{t=\max E_i}^{\max G} x_t$$

$$x_t = \begin{cases} 1 & \text{اگرتمام پروژه‌ها دردوره‌ t تکمیل شده‌اند} \\ 0 & \text{درغیراین صورت} \end{cases}$$

برای اینکه فعالیتها را طوری طراحی کنیم که هرچه زودتر انجام شوند و باعث افزایش زمان انجام نگردند . همان عملیاتی را که در تابع ابژکتیو قبل انجام دادیم را برای تابع ابژکتیو زمان انجام بکار می‌بریم تابع زیر بدست می آید .

$$\max: \sum_{t=\max E_i}^{\max} x_t - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{N} \sum_{t=E_{ij}}^{L_{ij}-1} t\, x_{ijt}$$

وهمان شرط مذکور درقبل

$$M > \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{N_i} L_{ij}$$

<u>حداقل کردن جریمه تاءخیر</u> .

همانطورکه درمسئله ردیف کردن عنوان گردید. میتوان جریمه تاءخیر را توسط روش برنامه ریزی صفر ـ یک حل نمود . حال اگر درمسئله طراحی پروژه‌ها جریمه دیرکردی هم برای انجام پروژه مشخص نمائیم ، باید تابع ابژکتیوی برقرار سازیم که کل جریمه تاءخیر را حداقل نماید. با رجوع به مثال ۳،

مسئله ردیف کردن، تابع ابژکتیوزیررافرموله کرده بودیم

$$\max: \sum_{i=1}^{6} P_i \sum_{t=g_i+1}^{T} X_{it}$$

جریمه تاء خیرپروژه‌ها برای یک شبکه I پروژه‌ای که‌درآن G_i تاریخ سررسید مطلق برای پروژه‌ء i ام باشدتابع فوق رابه‌شکل زیرمی نویسیم

$$\max: \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=g_i+1}^{G_i} P_{it} \quad x_{it}$$

محدودیت هـــــا

باتوجه به تابع ابژکتیو، محدودیت‌ها بایدرابطهء بین متغیرهـــا را منعکس نمایند .

محدودیتهای تکمیل فعالیت

باتوجه به تعریف متغیرهای x_{iJt} دیدیم که درحوزهء تعریف‌این‌متغیرها فقط وفقط یک ۱ بایدوجودداشته باشد که نشان میدهد که‌هرفعالیت دریــک زمان مشخص‌تکمیل می شود . این شرط راباارائه محدودیت‌زیروارد مـــدل می نمائیم

$$\sum_{t=E_{ij}}^{L_{i,j}} x_{ijt} = 1 \qquad \begin{array}{l} i= 1,2,\ldots,I \\ j= 1,2,\ldots,N_i \end{array}$$

توجه کنیدازآنجائیکه ممکن است مقدارغیرصفربرای X_{ijt} دردورهء زمانـــی L_{ij} واقع شود جملهء زیردرست است .

$$\sum_{t=E_{ij}}^{L_{ij}-1} x_{ijt} \leqslant 1 \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots\ I \\ j = 1,2,\ldots\ N_i \end{array}$$

متغیرآخردرجمع بالابه‌شکل زیرتعریف می شود :

$$X_{ij,L_{ij}} \equiv 1 - \sum_{t=E_{ij}}^{L_{ij}-1} x_{ijt}$$

اگردرسه مجموع فوق مجموع اول راجایگزین مجموع دوم کنیم (بااستفاده‌از مجموع سوم) تعدادمتغیرهای لازم کاهش مییابد

محدودیتهای تکمیل پروژه‌ها

باتوجه به تصویر ۲۹ واضح است‌که پروژهٔ i درزمان t تکمیل می‌شود اگر :

$$\sum_{q=E_{ij}}^{t-1} x_{ijq} = 1$$

برای تضمین اینکه x_{it} مقدارصفرداردمگراینکه‌تمام فعالیتهادرپروژهٔ i تکمیل شده‌باشند:

$$X_{it} \leqslant \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{q=E_{ij}}^{t-1} X_{ijq}$$

$$\begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,I \\ t = E_i + 1,\ldots,G_i \end{array}$$

برای آندسته ازطراحی های پروژه‌که تابع ابژکتیو زمان انجام راحداقل می نماید، به محدودیتهای تکمیل پروژهٔ مختلفی احتیاج داریم، همانطورکه درتابع ابژکتیومربوطه متغیر x_t استفاده شد تا x_{it} بدین ترتیب :

$$x_t \leqslant \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{I} N_i} \right) \sum_{i=1}^{I} \cdot \sum_{j=1}^{Ni} \sum_{q=E_{ij}}^{t-1} x_{ijq}$$

$t = \max E_i , \; \ldots , \; \max Gi$

<u>محدودیتهـــــای تقدم</u>

فرض‌کنید که فعالیت m ازپروژه i باید قبل ازفعالیت h ازپروژهٔ i باشد. اگر t_{im} بیانگرزمان تکمیل برای فعالیت m و t_{in} زمان تکمیل‌برای فعالیت nام باشد؛ لازم است‌که $t_{im}+d_{in}$ کوچکتریا مساوی با t_{in} باشد پس :

$$t_{im} + d_{in} \leqslant t_{in}$$

ازآنجائیکه تمام $x_{ijt}=0$ بجزبرای t هائی که فعالیتهای j درآنهـــا تکمیل می شوند ، میتوانیم بنویسیم

$$t_{im} = \sum_{t=E_{im}}^{L_{im}} t \; x_{imt}$$

$$t_{in} = \sum_{t=E_{in}}^{L_{in}} t \; x_{int}$$

وبا استفاده ازمعادلات‌فوق درنامعادله بالا:

$$\sum_{t=E_{im}}^{L_{im}} t x_{imt} + d_{in} \leqslant \sum_{t=E_{in}}^{L_{in}} t \; x_{int}$$

برای هرفعالیت j ازپروژهٔ i وبرای هرپروژهٔ i

محدودیت منابع

r_{ijk} تعدادواحدازمنبع k لازم برای انجام فعالیت j ازپروژهٔ i تعریف کردیم . همچنین متغیر R_{kt} کل تعدادواحد ازمنبع k که درزمان t موجوداست رابیان می نماید . نکته ای رابایددرنظرگرفت فرض شده است که r_{ijk} برای تمام دورهٔ تکمیل فعالیت لازم است . اگریک منبع فقط در قسمتهائی اززمان تکمیل فعالیتی لازم باشد (مثلا" درحین P دوره زمانی اول درز d_{ij} بطوریکه $P < d_{ij}$) میتوانیم هرفعالیت رابه دوزیرفعالیت بشکنیم که دردوره زمانی P و d_{ij} -p نیازبه منابع مختلفی دارند .

کل تعدادواحد ازمنبع k که درزمان t بکارگرفته میشودنباید ازتعداد واحدمنابع k که درزمان t موجوداست بیشترشود . یک فعالیت j احتیاج به واحدهائی ازمنبع k دارد ودرزمان t مشغول تکمیل شده است اگر :

$$t \leqslant q \leqslant t+ d_{ij} -1$$

q دورهٔ زمانی است که درآن فعالیت j تکمیل می شود . بدین ترتیب باتوجه به تصویر ۲۹ دیدیم که فعالیت (۲و۱) دردوره های زمانی ۱۰و...و۶و۵ = t مشغول تکمیل شدن است ، چون q=۱۰ میباشدوبرای هر کدام ازاین دوره های زمانی q بین t و $t + d_{ij} -1$ می افتد . درحین دوره های زمانی که فعالیت j درحال تکمیل شدن است ، متغیر x_{ijt} فقط دریکی ازاین دوره ها برابر یک است ودرباقی دوره ها برابرصفرمی باشد .

بنابراین حاصل ضرب $r_{ijk}\, x_{ijt}$ را برای تمام این دوره‌های زمانی که فعالیت j درحال تکمیل شدن است جمع می بندیم . این مجموع بیانگرتعداد واحدازمنبع k که برای فعالیت j لازم است میباشد:

$$\sum_{q=t}^{t+d_{ij}-1} r_{ijk}\, x_{ijq}$$

عبارت فوق ازمقدارمنابع موجودنباید تجاوزکند . بنابراین برای فعالیت j میتوانیم بنویسیم :

$$\sum_{q=t}^{t+d_{ij}-1} r_{ijk}\, x_{ijq} \leqslant R_{kt}$$

گسترش رابطه فوق برای ملاحظه تمام فعالیتها وتمام پروژه‌ها ، بشکل زیراست :

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{q=t}^{t+d_{ij}-1} r_{ijk}\, x_{ijq} \leqslant R_{kt}$$

برای $t = \min a_{ij}, \ldots \max Q_i$

$k = 1, 2, \ldots K$

و

بایدبخاطر داشت که برای بعضی ازمتغیرهای x_{ijt} ازقبل مقدارصفردر نظر گرفته شده است بطورمثال

اگر $x_{ijt} \equiv 0 \quad L_{ij} < t < E_{ij}$

مثال عددی

یک مسئله طراحی باسه پروژه وهشت فعالیت رادرنظربگیریدخصوصیات این مسئله درتصویر ۳۱ آورده شده است .

پروژه i	فعالیت j	رابطه تقدم (i,j)	زمان سررسید a_{ij}	مدت انجام d_{ij}	تاریخ سررسید مطلق G_i	نیاز به منابع $k=1$	$k=2$	$k=2$
۱	۱	ندارد	۱	۴	۸	۵	۳	۲
۱	۲	(۱و۱)	۱	۳	۸	۰	۱	۱
۱	۳	ندارد	۱	۳	۸	۲	۰	۲
۲	۱	ندارد	۲	۳	۹	۱	۱	۱
۲	۲	ندارد	۲	۲	۹	۲	۰	۰
۲	۳	(۲و۱)	۲	۲	۹	۲	۲	۰
۳	۱	ندارد	۳	۵	۹	۲	۱	۱
۳	۲	ندارد	۳	۱	۹	۱	۳	۰
		R_{kt}		مقدار منبع K موجوددرهردوره زمانی		۸	۵	۴

تصویر ۳۱

مقادیر متغیرهای از قبل تعیین شده

فعالیت (او۱) را درنظربگیرید .چون یک درزمان یک میرسد احتیاج به ۴ دوره‌زمانی برای تکمیل شدن دارد وهیچ محدودیت تقدم نداردپس $E_{11}=4$ وبنا براین $x_{113} = x_{112} = x_{111} = 0$. فعالیت (۲و۱) رادرنظر بگیرید ازآنجائیکه $a_{12}= 1$ و $d_{12} = 3$ وفعالیت (او۱) بایدقبل ازآن انجام شود : $E_{12} = 7$ و پس بطورکامل :

$$x_{111} = x_{112} = x_{113} = 0$$

$$x_{121} = x_{122} = x_{123} = x_{124} = x_{125} = x_{126} = 0$$

$$x_{131} = x_{132} = 0$$

$$x_{211} = x_{212} = x_{213} = 0$$

$$x_{221} = x_{222} = 0$$

$$x_{231} = x_{232} = x_{233} = x_{234} = x_{235} = 0$$

$$x_{311} = x_{312} = x_{313} = x_{314} = x_{315} = x_{316} = 0$$

$$x_{321} = x_{322} = 0$$

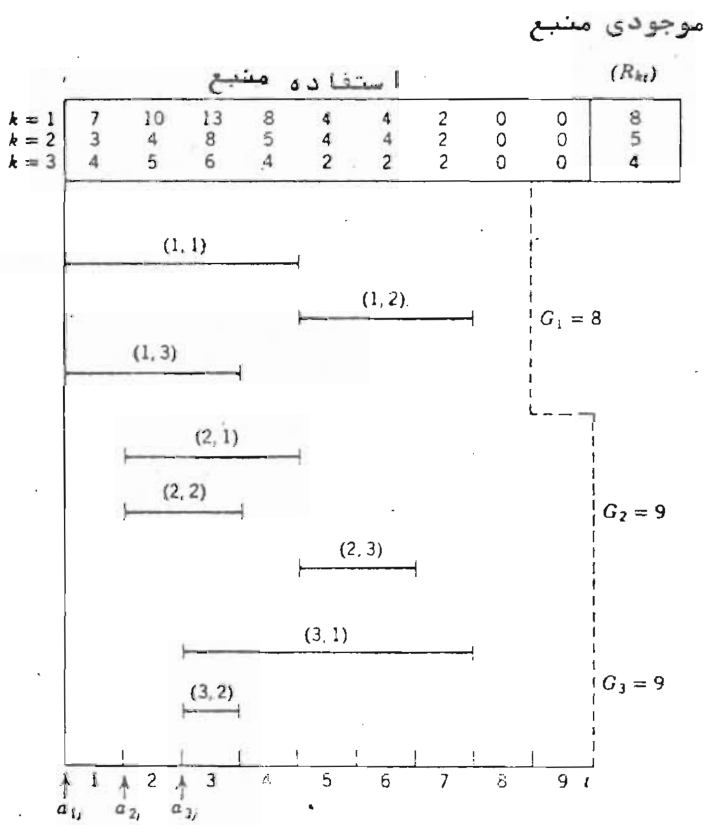
ازطرف دیگرفعالیت (او۱) بایدتا زمان ۵ تمام شودتافعالیت (۲و۱) مهلت پایان تا زمان ۸ راداشته باشد پس :

$$x_{116} + x_{117} + x_{118} = 0$$

وهمچنین برای فعالیت (۳و۲)

$$x_{218} = x_{219} = 0$$

مقادیراین متغیرها درتصویر ۳۲ آورده شده است . دراین تصویرمعیار زودترین تاریخ شروع بکارگرفته شده وفرض شده که منابع نامحدوداست .



تصویر ۳۲

درتصویر ۳۲ نکات زیر واضح است :

$E_{11} = 4 \ , \ L_{11} = 5$

$E_{12} = 7 \ , \ L_{12} = 8$

$E_{13} = 3 \ , \ L_{13} = 8$

$E_{1} = 8$

$E_{21} = 4 \ , \ L_{21} = 7$

$E_{22} = 3 \ , \ L_{22} = 9$

$E_{23} = 6 \ , \ L_{23} = 9$

$E_{2} = 7$

$E_{31} = 3, \ L_{31} = 9$

$E_{32} = 3 \ , \ L_{32} = 9$

$E_{3} = 8$

تابع ابژکتیو

تابع ابژکتیو حداقل کننده‌ٔ زمان عملیات با زودترین شروع به عنوان اولویت دوم درنظر گرفته شده است . تابع ابژکتیوکه درمبحث تابع ابژکتیو قسمت حداقل کننده‌ٔ زمان عملیات آورده شده است را بکار میگیریم . یک مقدار مناسب برای M تعیین می کنیم .

$M > L_{11} + L_{12} + L_{13} + L_{21} + L_{22} + L_{23} + L_{33}$

$M > 5 + 8 + 8 + 7 + 9 + 9 + 9 + 9$

$M > 64$

پس $M = ۶۵$ درنظرگرفته می شود.

تابع ابژکتیوبه‌شکل زیرخواهدبود:

$$
\begin{aligned}
\max: \quad & (x_{18} + x_{27} + x_{28} + x_{29} + x_{38} + x_{39}) \\
& -\frac{1}{65}\,(4x_{114} + 7x_{127} + 3x_{133} + 4x_{134} + 5x_{135} \\
& + 6x_{136} + 7x_{137} + 4x_{214} + 5x_{215} + 5x_{216} \\
& + 3x_{223} + 4x_{224} + 5x_{225} + 6x_{226} + 7x_{227} \\
& + 8x_{228} + 6x_{236} + 7x_{237} + 8x_{238} + 7x_{317} \\
& + 8x_{318} + 3x_{323} + 4x_{324} + 5x_{325} + 6x_{326} \\
& + 7x_{327} + 8x_{328}
\end{aligned}
$$

محدودیتهای تکمیل فعالیت ها

همانطورکه درمبحث مربوط به‌این گونه محدودیت‌ها آورده‌شدبرای این مثال محدودیت‌های تکمیل فعالیتها به‌شکل زیرخواهدبود:

$$x_{114} \leqslant 1$$

$$x_{127} \leqslant 1$$

$$x_{133} + x_{134} + x_{135} + x_{136} + x_{137} \leqslant 1$$

$$x_{214} + x_{215} + x_{216} \leqslant 1$$

$$x_{223} + x_{224} + x_{225} + x_{226} + x_{227} + x_{228} \leqslant 1$$

$$x_{236} + x_{237} + x_{238} \leqslant 1$$

$$x_{317} + x_{318} \leqslant 1$$

$$x_{323} + x_{324} + x_{325} + x_{326} + x_{327} + x_{328} \leqslant 1$$

محدودیتهای تکمیل پروژه

با استفاده از روابط مذکور در مبحث مربوطه این گونه محدودیت ها که قبلا" ذکر گردیده میتوانیم بنویسیم :

$$x_{18} \leqslant \frac{1}{3} (x_{114} + x_{115} + x_{116} + x_{117} + x_{127} + x_{133} + x_{134} + x_{135} + x_{136} + x_{137})$$

$$x_{27} \leqslant \frac{1}{3} (x_{214} + x_{215} + x_{216} + x_{223} + x_{224} + x_{225}$$

$$x_{226} + x_{236})$$

$$x_{28} \leqslant \frac{1}{3} (x_{223} + x_{224} + x_{225} + x_{226} + x_{227} + x_{236} + x_{237})$$

$$x_{29} \leqslant \frac{1}{3} (x_{223} + x_{224} + x_{225} + x_{226} + x_{227} + x_{228} + x_{236} + x_{237} + x_{238})$$

$$x_{38} \leqslant \frac{1}{2} (x_{317} + x_{323} + x_{324} + x_{325} + x_{326} + x_{327})$$

$$x_{39} \leqslant \frac{1}{2} (x_{318} + x_{323} + x_{324} + x_{328})$$

محدودیت‌های تقدم

این محدودیتها همانطورکه شکل کلی آنها قبلا" ارائه گردیدازقرارذیل می باشند. بایدتوجه کردکه درپروژه‌ ۱ تنهافعالیت (۱و۱) بایدقبل از(۲و۱) باشد. اگر m اشاره‌به فعالیت (۱و۱) و n به فعالیت (۲و۱) اشاره نماید می توانیم بنویسیم :

$$4x_{114} + 5x_{115} + 3 \leqslant 7x_{127} + 8x_{128}$$

درپروژه‌ ۲ فعالیت (۱و۲) بایدقبل از(۳و۲)باشدپس :

$$4x_{214} + 5x_{215} + 6x_{216} + 7x_{217} + 3 \leqslant 6x_{236} + 7x_{237}$$

$$+ 8x_{238} + 9x_{239}$$

محدودیت منابع

باتوجه به‌شکل کلی‌محدودیت منابع که قبلا" ذکرگردید $\min a_{ij} = 1$ و $\max G_i = 9$ بنابراین واضح است‌که احتیاج به محدودیت‌های منابع‌زیر داریم :

R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}, R_{16}, R_{17}, R_{18}, R_{19}

R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{23}, R_{24}, R_{26}, R_{27}, R_{28}, R_{29}

R_{31}, R_{32}, R_{33}, R_{34}, R_{35}, R_{36}, R_{37}, R_{38}, R_{39}

به‌هرحال میتوان نشان دادکه‌محدودیت‌های منابع که برای دوره‌های زمانی یک ودودرنظرگرفته می شوندزیادی هستند وفقط احتیاج به ۲۱محدودیتی داریم که دربالامشخص شده‌اند. ازطرفی ، مقادیرتعیین شده ازقبل برای

متغیرهای x_{ijt} (همانطورکه درتصویر۳۲ نشان داده‌شده‌است) تعـــــدادی ازجملات حاصل ضرب $x^2_{1jk}\,x_{1jq}$ را حذف می کنند.

حال شکل کلی محدودیت منابع رادرنظر بگیرید

$$\sum_{i=1}^{I}\ \sum_{j=1}^{N_i}\ \sum_{q=1}^{t+d_{ij}-1} r_{ijk}\, x_{ijq} \leqslant R_{kt}$$

$t=\min a_{ij},\ \ldots,\ \max G_i$

$k=1,2,\ldots,K$

$q=t,\ldots\ldots,t+d_{ij}-1$

برای روشن ترشدن مطلب مقادیرپارامترها رابازمی کنیم تاشکل محدودیت خاص مسئله ماگردد.

$i=1,2,3,$

$j=1,\ldots,N_i$

$$\begin{cases} N_1 = 3 \\ N_2 = 3 \\ N_3 = 2 \end{cases}$$

$k=1,2,3,$

$t=3,4,\ldots,9$

$t=3 \rightarrow q=3\ ,\ldots,\ d_{ij}+2$

$t=4 \rightarrow q=4\ ,\ldots,\ d_{ij}+3$

$t=5 \rightarrow q=5\ ,\ldots,\ d_{ij}+4$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$t=9 \rightarrow q=9\ ,\ldots,\ d_{ij}+8$

حالا سعی می کنیم که محدودیت منابع را درحالات خاص بیان کنیم :

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{q=1}^{t+d_{1j}-1} r_{ijk}\,x_{1jq} + \sum_{j=1}^{3}\sum_{q=1}^{t+d_{2j}-1} r_{2jk}\,x_{2jq}$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\sum_{q=1}^{t+d_{1j}-1} r_{3jk}\,x_{3jq} \leq R_{1t}$$

ویا بشکل بازتر :

$$\sum_{q=1}^{t+d_{11}-1} r_{11k}\,x_{11q} + \sum_{q=t}^{t+d_{12}-1} r_{12k}\,x_{12q} + \sum_{q=t}^{t+d_{1c}-1} r_{13k}\,x_{13q}$$

$$+\sum_{q=1}^{t+d_{21}-1} r_{21k}\,x_{21q} + \sum_{q=t}^{t+d_{22}-1} r_{22k}\,x_{22q}$$

$$+\sum_{q=t}^{t+d_{23}-1} r_{23k}\,x_{23q} + \sum_{q=t}^{t+d_{31}-1} r_{31k}\,x_{31q}$$

$$+\sum_{q=1}^{t+d_2-1} r_{32k}\, x_{32q} \leqslant R_{kt}$$

حال بجای d_{ij} ها مقادیرآنها راازتصویر ۳۱ استخراج کرده ودرجملات بالاقرارمی دهیم :

$$\sum_{q=t}^{t+3} r_{11k}\, x_{11q} + \sum_{q=t}^{t+2} r_{12k}\, x_{12q} + \sum_{q=t}^{t+2} r_{13k}\, x_{13q}$$

$$+\sum_{q=t}^{t+2} r_{21k}\, x_{21q} + \sum_{q=t}^{t+1} r_{22k}\, x_{22q} + \sum_{q=t}^{t+1} r_{23k}\, x_{23q}$$

$$+\sum_{q=t}^{t+4} r_{31k}\, x_{31q} + \sum_{q=t}^{t} r_{32k}\, x_{32q} \leqslant R_{kt}$$

همانطورکه درمبحث محدودیت های منابع ذکرگردید

$$x_{ijk} \equiv 0 \qquad t < E_{ij}$$
$$t > L_{ij}$$

t هائی که درمحدودهٔ فوق قرارنمی گیرند باتوجه به i و j درجدول تصویر ۳۳ آورده‌شده‌اند

	i	j	E_{ij}	L_{ij}	$E_{ij} \leqslant q \leqslant L_{ij}$ q هائی‌که $x_{ijq}=0$ را ایجادنمی کنند
اول	۱	۱	۴	۵	۵ و ۴
دوم	۱	۲	۷	۸	۸ و ۷
سوم	۱	۳	۳	۸	۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳
چهارم	۲	۱	۴	۷	۷ و ۶ و ۵ و ۴
پنجم	۲	۲	۳	۹	۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳
ششم	۲	۳	۶	۹	۹ و ۸ و ۷ و ۶
هفتم	۳	۱	۳	۹	۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳
هشتم	۳	۲	۳	۹	۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳

(تصویر ۳۳)

برای K=1

$$5\sum_{q=t}^{t+3} x_{11q} + 0\sum_{q=t}^{t+2} x_{12q} + 2\sum_{q=t}^{t+2} x_{13q}$$

$$+1\sum_{q=t}^{t+2} x_{21q} + 2\sum_{q=t}^{t+1} x_{22q} + 2\sum_{q=t}^{t+1} x_{23q} + 2\sum_{q=t}^{t+4} x_{31q}$$

$$+1\sum_{q=t}^{t} x_{32q} \leqslant 8$$

$t = 3,...,9$ به t مقدارمیدهیم

$t=3$

$$5x_{114} + 5x_{115} + 2x_{133} + 2x_{134} + 2x_{135} + x_{214} + x_{215} + 2x_{223} + 2x_{224} + 2x_{317} + x_{323} \leq 8$$

$t=4$

$$5x_{114} + 5x_{115} + 2x_{134} + 2x_{135} + 2x_{136} + x_{214} + x_{215} + x_{216} + 2x_{224} + 2x_{225} + x_{324} \leq 8$$

$t=5$

$$5x_{115} + 2x_{135} + 2x_{136} + 2x_{137} + x_{215} + x_{216} + x_{217} + 2x_{225} + 2x_{226} + 2x_{236} + 2x_{317} + 2x_{318} + 2x_{319} + x_{325} \leq 8$$

$t=6$

$$2x_{136} + 2x_{137} + 2x_{138} + x_{216} + x_{217} + 2x_{226} + 2x_{227} + 2x_{236} + x_{237} + 2x_{317} + 2x_{318} + 2x_{319} + x_{326} \leq 8$$

$t=7$

$$2x_{137} + 2x_{138} + x_{217} + 2x_{227} + x_{228} + 2x_{237} + x_{238} + x_{317} + x_{318} + x_{319} + x_{327} \leq 8$$

$t=8$

$$2x_{138} + 2x_{228} + x_{229} + 2x_{238} + 2x_{239} + 2x_{318} + 2x_{319} + x_{328} \leqslant 8$$

$t=9$

$$x_{219} + 2x_{229} + 2x_{239} + 2x_{319} + x_{329} \leqslant 8$$

برای $K=2$

$$3\sum_{q=t}^{t+3} x_{11q} + \sum_{q=t}^{t+2} x_{12q} + \sum_{q=t}^{t+2} x_{13q}$$

$$+ \sum_{q=t}^{t+2} x_{21q} + \sum_{q=t}^{t+1} x_{22q} + 2\sum_{q=t}^{t+1} x_{23q}$$

$$+ 1\sum_{q=t}^{t+4} x_{31q} + 3\sum_{q=t}^{t} x_{32q} \leqslant 5$$

به t مقدار میدهیم $t = 3, \dots, 9$

$t=3$

$$3x_{114} + 3x_{115} + x_{214} + x_{215} + x_{317} + 3x_{323} \leqslant 5$$

$t=4$

$$3x_{114} + 3x_{115} + x_{214} + x_{215} + x_{216} + x_{317} + x_{318} + 3x_{324} \leqslant 5$$

$t=5$

$$3x_{115} + x_{127} + x_{215} + x_{216} + x_{217} + x_{236} + x_{317} + x_{318} + x_{319} + 3x_{325} \leqslant 5$$

$t=6$

$$x_{127} + x_{128} + x_{216} + x_{217} + 2x_{236} + 2x_{237} + x_{317} + x_{318} + x_{319} + 3x_{326} \leqslant 5$$

$t=7$

$$x_{127} + x_{128} + x_{217} + 2x_{237} + 2x_{238} + x_{317} + x_{318} + x_{319} + 3x_{327} \leqslant 5$$

$t=8$

$$x_{128} + 2x_{238} + 2x_{239} + x_{318} + x_{319} + 3x_{328} \leqslant 5$$

$t=9$

$$2x_{239} + x_{319} + 3x_{329} \leqslant 5$$

وبالاخره $K=3$

$$2\sum_{q=t}^{t+3} x_{11q} + 1\sum_{q=t}^{t+2} x_{12q} + 2\sum_{q=t}^{t+2} x_{13q} + \sum_{q=t}^{t+2} x_{21q}$$

$$+\sum_{q=t}^{t+1} x_{22q} + 0\sum_{q=t}^{t+1} x_{23q} + \sum_{q=t}^{t+4} x_{31q} + 0\sum_{q=t}^{t} x_{32q} \leqslant 4$$

دوباره به t مقدارمیدهیم $t=3,\ldots,9$

$t=3$

$$5x_{114} + 5x_{115} + 2x_{133} + 2x_{134} + 2x_{135} + x_{214} + x_{215}$$

$$+ 317 \leqslant 4$$

$t=4$

$$5x_{114} + 5x_{115} + 2x_{134} + 2x_{135} + 2x_{136} + x_{214} + x_{215}$$

$$+ x_{216} + x_{317} + x_{318} \leqslant 4$$

$t=5$

$$5x_{115} + x_{127} + 2x_{136} + 2x_{137} + x_{215} + x_{216} + x_{217}$$

$$+ x_{317} + x_{318} + x_{319} \leqslant 4$$

t=6

$$x_{127} + x_{128} + 2x_{136} + 2x_{137} + 2x_{138} + x_{216} + x_{217}$$

$$+ x_{317} + x_{318} + x_{319} \leqslant 4$$

t=7

$$x_{127} + x_{128} + 2x_{137} + 2x_{138} + x_{217} + x_{317} + x_{318}$$

$$x_{319} \leqslant 4$$

t=8

$$x_{128} + 2x_{138} + x_{318} + x_{319} \leqslant 4$$

t=9

$$x_{319} \leqslant 4$$

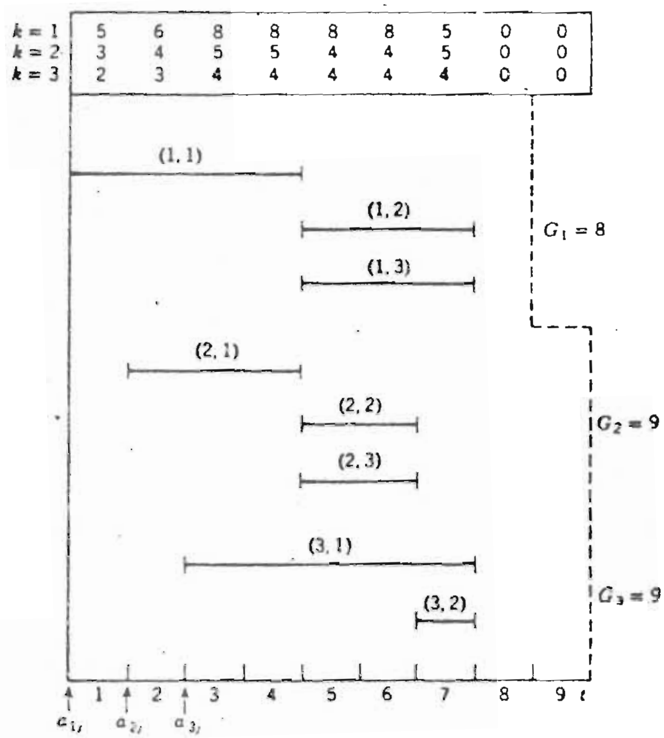
شکل کامل مدل با ۳۳ متغیر و ۳۷ محدودیت فرموله شد با حل این مسئله جواب زیر بدست خواهد آمد (تصویر ۳۴ و ۳۵) .

متغیرها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
					t				
X_{11t}	—	—	—	۱	۰	—	—	—	
X_{12t}	—	—	—	—	—	—	۱	۰	
X_{13t}	—	—	—	۰	۰	۰	۱	۰	
X_{1t}	—	—	—	—	—	—	—	۱	
X_{21t}	—	—	—	۱	۰	۰	۰	—	—
X_{22t}	—	—	—	۰	۰	۱	۰	۰	۰
X_{23t}	—	—	—	—	—	۱	۰	۰	۰
X_{2t}	—	—	—	—	—	—	۱	۱	۱
X_{31t}	—	—	—	—	—	—	۱	۰	۰
X_{32t}	—	—	—	۰	۰	۰	۱	۰	۰
X_{3t}	—	—	—	—	—	—	—	۱	۱

(—) بیانگراین استکه مقدارمتغیرازقبل صفرتعیین شده است .

(تصویر ۲۴)

استفاده منبع



تصویر ۳۵

منابع ومآخذ

- Moeseke, pawl van . Mathematical Programs for Activity Analysis- edition- North- Holland Publishing C ompany 1974. New york.

- Hu, T.C., Integer programming and Network flows, Addison Wesley Company 1969.

- McMillan, claude Jr. Mathematical Programming, John wiley & sons, Inc., 1970

- Land, A.H.& A.Doig An Automatie method of Solving discrete Progranmming Problems, Econometrica 28,1960, PP. 297-520.

- Hillier F.,S. & G.J. Lieberman, Introduction to Operations Research, Holden- Day Inc, 1967.

Loomba, N.Pavl, linear Programming . Mc Graw Hill book Company, 1964.

- Mcmillan,claude Jr. & Donald R. Plane. Discrete optimization , Integer programming and Network analysis for Management decisions. Prentice- Hall Inc. Englewood cliffs, Newjersey 1971.

- Conway, R .W. & L.W. Maxwell & L.W. Miller. Theory of scheduling. Readings, mass.; Addison- wesley 1967.

- Hanssman, Fred, opration Research technique . for capital Investment . New york, wiley 1962.

- Muth, J.F. & G. L. Thompson (edition) . Industrial Scheduling. Englewood Cliffs. N.J., Printice- Hall 1963.

- Balas,E. An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-one variables, operation Research , Vol .13. 1965 PP. 517- 546.

- Greenberg,H., Integer programming , Now york, Academic Press, 1971.

- Scott ,A.J., combinatorial programming, spatial Analysis and planning, London , Methuen 1971.

- Saaty , T,L. optimization in Integers and related extermal problems. New york , Mc Graw - Hill , 1970.

- Abadie , J- (edition) , Integer and non linear programming, New york, Elsevier, 1970.

- Hadley ,G . Non- linear programming . Reading, Mass , Addison - wesley, 1964, .

- Gass,S.L.Linear Programming methods and application , New york McGraw-Hill,1969.

- Dantzig , G.B. Linear Programming and extensions . Princeton, N.J. , Princeton U.P., 1963.

- Sasaki ,K. Introduction to Finite mathematics and linear Programming . Belmont , calif, wadsworth , 1970.